Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

9.Blatt
Übungen 13.12.05
Abgaben bis 03.01.06

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Es sei (X_n) ein Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$.Man zeige dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $\sup_n E[X_n^2] < \infty$;

b) (X_n) ist Cauchyfolge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

c) $X_n \to X_\infty$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

d) Es existiert ein X in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $X_n = E[X \mid \mathcal{F}_n]$.

2.Aufgabe: Es sei (X_n) eine einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $X_0 = 0$. Weiterhin definieren wir für $a \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$ die Stoppzeit

$$\tau := \min\{n \geq 0 \,:\, X_n = a\},$$

von der wir in der Übung gezeigt haben, dass sie P-fast sicher endlich ist. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Laplace-Transformierte $E[\exp(-\lambda\tau)]$, $\lambda \geq 0$, zu berechnen. Wir gehen dafür in folgenden Schritten vor:

(i) Man bestimme α so, dass (M_n), $M_n := \exp(\alpha X_n - \lambda n)$, ein Martingal ist.

(ii) Man zeige, dass $(M_{\tau\wedge n})$ gleichgradig integrierbar ist.

(iii) Man berechne nun mit Hilfe von Optional Stopping die Laplace-Tranformierte.

3.Aufgabe: Es sei (X_n) ein Martingal oder ein nichtnegatives Submartingal.

(i) Für jedes $p > 1$ ist $(f_p(X_k))$, $f_p(x) := \exp(x/p)$, ein nichtnegatives Submartingal..

(ii) Mit Hilfe der Doobschen Ungleichungen und (i) zeige man, dass

$$E\left[\exp\left(\max_{k\leq n} X_k\right)\right] \leq E\left[\exp\left(1 + X_n\right)\right].$$