Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

8.Blatt
Übungen 06.12.05
Abgaben bis 13.12.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Es seien σ und τ Stoppzeiten in einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$.

(i) Man zeige

$$\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subseteq \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\sigma \vee \tau}.$$

(ii) Hieraus schließe man, dass aus $\sigma \leq \tau$ für alle ω auch

$$\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$$

folgt.

2.Aufgabe: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Man zeige:

(i) Für eine integrierbare Zufallsvariable $Z \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist

$$X_n := E[Z \,|\, \mathcal{F}_n], \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

ein Martingal.

(ii) Ist (X_n) ein Supermartingal und gilt $E[X_N] \geq E[X_0]$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$, so folgt $X_n = E[X_N \,|\, \mathcal{F}_n]$ für alle $n \in \{0, \ldots, N\}$.

3.Aufgabe: Es sei (X_n), $n \in \mathbb{N}_0$, eine einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $X_0 = 0$. Wir definieren

$$Y_n := \max_{0 \leq j \leq n} X_j - X_n.$$

Man zeige, dass Y_n ein Submartingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n^X)$ ist und eine Doob-Zerlegung

$$Y_n = M_n + \frac{1}{2} l_n$$

besitzt, wobei $l_n = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_0(Y_k)$ die Lokalzeit von (Y_n) in 0 ist.

4.Aufgabe: Es sei $(Y_n) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Folge quadratintegrierbarer, unabhängiger Zufallsvariablen mit $E[Y_n] = 1$ für alle n. Wir definieren

$$X_n := \prod_{i=0}^{n} Y_i.$$

Man zeige, dass (X_n) ein quadratintegrierbares Martingal bezüglich der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_n^X)$ ist und berechne die quadratische Variation $\langle X \rangle_n$.

Jede Aufgabe 6 Punkte