Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

7.Blatt
Übungen 29.11.05
Abgaben bis 06.12.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe:

(i) Es sei B eine Borelmenge und (X_n) eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen. Rekursiv definieren wir die n-te Eintritts- in bzw. Austrittszeit aus B durch

$$\begin{aligned}\tau_1 &:= \inf\{k : X_k \in B\};\\ \sigma_1 &:= \inf\{k > \tau_1 : X_k \notin B\};\\ \tau_n &:= \inf\{k > \sigma_{n-1} : X_k \in B\};\\ \sigma_n &:= \inf\{k > \tau_n : X_k \notin B\}.\end{aligned}$$

Man zeige, dass die so definierten σ_i und τ_i für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ Stoppzeiten sind.

(ii) Es seien τ_1 und τ_2 Stoppzeiten. Man zeige, dass auch $\tau_1 \wedge \tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2$ und $\tau_1 + \tau_2$ Stoppzeiten sind.

2.Aufgabe: Es sei (X_n), $n \in \mathbb{N}_0$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $X_n(\omega) > c > 0$ für alle ω und jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren

$$\tau_n = \min\{m \geq 0 : \sum_{k=0}^{m} X_k \geq n\}.$$

(i) Man zeige, dass $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots$ eine Folge von Stoppzeiten bezüglich der kanonischen Filtration ist.

(ii) Man zeige, dass $\sum_{i=0}^{\tau_n} X_i$ für jedes n $\mathcal{F}_{\tau_n}$-messbar ist.

3.Aufgabe: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und (M_n) eine integrierbare Folge adaptiert an $\mathcal{F}_n$.

(i) Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) (M_n) ist ein Martingal;

(b) $E[M_{n+1} - M_n \,|\, \mathcal{F}_n] = 0$ P-fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}_0$;

(c) $E[M_n \,|\, \mathcal{F}_k] = M_k$ P-fast sicher für alle $0 \leq k \leq n$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Es sei $M = (M_n)$ ein Martingal und $H = (H_n)$ eine prävisible, beschränkte Folge von reellwertigen Zufallsvariablen. Wir definieren das *diskrete stochastische Integral* von H bezüglich M durch

$$(H \circ M)_n := \sum_{k=0}^{n} H_k(M_k - M_{k-1}) \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Man zeige, dass $H \circ M$ wieder ein Martingal ist.

4.Aufgabe: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und (M_n) ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)$. Weiterhin seien Filtrationen $(\mathcal{G}_n)$, $(\mathcal{H}_n)$ gegeben, so dass

$$\mathcal{F}_n^M \subseteq \mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{G}_n.$$

(i) Man zeige, dass (M_n) auch ein $\mathcal{H}_n$-Martingal ist, insbesondere also auch ein Martingal bezüglich seiner kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_n^M)$.

(ii) Ist (M_n) stets auch ein $\mathcal{G}_n$-Martingal?