Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

6.Blatt
Übungen 22.11.05
Abgaben bis 29.11.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{D}$ eine triviale Teil-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ (d.h. $P(D) = 0$ oder $P(D) = 1$ für jedes $D \in \mathcal{D}$). Man zeige, dass für jedes $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$E[X \mid \mathcal{D}] = E[X] \quad \text{fast sicher}$$

gilt.

2.Aufgabe: Es seien $X_1, X_2, \ldots X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable und $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Man berechne

$$E\left[X_n \mid S_n\right].$$

3.Aufgabe: Es seien T_0 und T_1 unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, beide exponentialverteilt zum Parameter α und $X := T_0 \wedge T_1 := \min(T_0, T_1)$.

(i) Man berechne die bedingte Erwartung $E[X \mid T_0]$.

(ii) Man berechne die beste *lineare* Schätzung $\widehat{X} := aT_0 + b$ von X bezüglich T_0.

(iii) Man vergleiche die mittleren quadratischen Schätzfehler $E[(X - \widehat{X})^2]$ und $E[(X - E\left[X \mid T_0\right])^2]$.

4.Aufgabe: Es sei $X_n \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n), P)$ ein Martingal. Man zeige, dass für $0 < k < l < \infty$ die Beziehung

$$E[X_l^2] - E[X_k^2] = \sum_{j=k}^{l-1} E\left[(X_{j+1} - X_j)^2\right]$$

gilt.

Jede Aufgabe 6 Punkte