Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

5.Blatt
Übungen 15.11.05
Abgaben bis 22.11.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Eine faire Münze wird wiederholt geworfen. Die Zufallsvariable X_i bezeichne das Ergebnis im i-ten Wurf ($X_i = 1$ für Kopf, $X_i = 0$ für Zahl). Es sei M eine gegebene 0-1-Folge der Länge m und $Y_n := (X_n, \ldots, X_{n+m})$. Man zeige, dass die Menge $A := \{Y_n = M \text{ unendlich oft}\}$ in der Tail-σ-Algebra liegt.

2.Aufgabe: Es sei (X_n) eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $P(X_i = 1) = 1/2 + \alpha$ und $P(X_i = -1) = 1/2 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1/2)$. Weiters sei $\mathcal{A}_n$ die von $X_1, \ldots, X_n$ erzeugte σ-Algebra und $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Man zeige für $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$E\left[S_n \mid \mathcal{A}_k\right] = S_k + 2\alpha(n-k).$$

3.Aufgabe: Für eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und eine σ-Algebra $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ definieren wir die bedingte Varianz von X bezüglich $\mathcal{A}_0$ als

$$\operatorname{var}(X \mid \mathcal{A}_0) := E\left[(X - E[X \mid \mathcal{A}_0])^2 \,\middle|\, \mathcal{A}_0\right].$$

(i) Man zeige:

$$\operatorname{var}(X \mid \mathcal{A}_0) = E\left[X^2 \mid \mathcal{A}_0\right] - \left(E[X \mid \mathcal{A}_0]\right)^2$$

und

$$\operatorname{var}(X) = E\left[\operatorname{var}(X \mid \mathcal{A}_0)\right] + \operatorname{var}\left(E[X \mid \mathcal{A}_0]\right).$$

(ii) Es sei (X_n) eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit demselben Erwartungswert m und derselben Varianz σ^2. T sei eine von $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und endlichem Erwartungswert. Weiters definieren wir $S_T := X_1 + X_2 + \ldots + X_T$ (und $S_0 = 0$); man zeige

$$E[S_T] = m \cdot E[T] \qquad \text{und} \qquad \operatorname{var}(S_T) = \sigma^2 \cdot E[T] + m^2 \cdot \operatorname{var}(T).$$

4.Aufgabe: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die σ-Algebren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ seien Teil-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ (also $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$).

(i) Man zeige, dass für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$

$$E[X \mid \mathcal{B}] = E[E[X \mid \mathcal{B}] \mid \mathcal{C}] = E[E[X \mid \mathcal{C}] \mid \mathcal{B}]$$

gilt.

(ii) Man zeige an Hand eines Gegenbeispiels, dass im Allgemeinen

$$E[E[X \mid \mathcal{B}] \mid \mathcal{C}] \neq E[E[X \mid \mathcal{C}] \mid \mathcal{B}].$$

Jede Aufgabe 6 Punkte