Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

4.Blatt
Übungen 08.11.05
Abgaben bis 15.11.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Es seien λ, μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(i) Man zeige, dass falls für $\mu \ll \nu \ll \lambda$ die Funktion f eine Version der Radon-Nikodym-Dichte $d\mu/d\nu$ ist und g eine Version von $d\nu/d\lambda$, dann auch $f \cdot g$ eine Version der Radon-Nikodym-Dichte $d\mu/d\lambda$ ist, kurz:

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\lambda}.$$

(ii) Die Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν heißen äquivalent ($\mu \approx \nu$), falls sowohl $\mu \ll \nu$ als auch $\nu \ll \mu$ gilt. Man zeige, dass $d\mu/d\nu > 0$ fast überall gilt (bezüglich welchen Maßes?) und dass

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}.$$

2.Aufgabe:

(i) Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable auf $\Omega = \{0, 1, \ldots n\}$. Man zeige, dass das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf Ω absolutstetig zur Gleichverteilung ν auf Ω ist und berechne die Radon-Nikodym-Dichte.

(ii) Man berechne die Radon-Nikodym-Dichte der Exponentialverteilung bezüglich der eindimensionalen Standard-Normalverteilung.

3.Aufgabe: Es seien $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $X_i(\omega) := x_i$ für $\omega = (x_1, x_2, \dots) \in \Omega$ und $\mathcal{A} = \sigma(X_1, X_2, \ldots)$. Weiterhin seien μ und ν diejenigen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, unter denen die (X_i) unabhängig und identisch verteilt mit $\mu(X_i = 1) = p$ und $\nu(X_i = 1) = q$, $p, q \in (0, 1)$, $p \neq q$ sind.

a) Sei $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ die von $X_1, \ldots, X_n$ erzugte σ-Algebra. Man zeige, dass die Radon-Nikodym-Dichte von ν bzgl. μ auf $\mathcal{A}_n$ gegeben ist durch

$$\varphi_n(\omega) = \frac{\nu(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)}{\mu(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)}$$

für $\omega = (x_1, x_2, \ldots) \in \Omega$. Insbesondere gilt $\nu \approx \mu$ auf $\mathcal{A}_n$.

b) Mit dem starken Gesetz der Großen Zahlen untersuche man die μ- bzw. ν-fast sichere Asymptotik von

$$\frac{1}{n} \log \varphi_n.$$

c) Aus b) folgere man, dass ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A) = 1$ und $\nu(A) = 0$. Insbesondere gilt also weder $\mu \ll \nu$ noch $\nu \ll \mu$ auf ganz $\mathcal{A}$.

4.Aufgabe: Es sei X eine nichtnegative, reellwertige Zufallsvariable. Man zeige mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$EX = \int_{[0,\infty)} P(X > t)\,\lambda(dt).$$