Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

3.Blatt
Übungen 01.11.05
Abgaben bis 08.11.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe:

(i) Seien f und g messbare numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Man zeige, dass die Mengen $\{f < g\}$ und $\{f = g\}$ $\mathcal{A}$-messbar sind.

(ii) Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i \in \{1, 2\}$ zwei Maßräume. Man zeige, dass das Mengensystem $\mathcal{S} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ ein Semiring ist.

2.Aufgabe: Es seien f, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrierbare Funktionen. Man zeige die folgenden Eigenschaften des Lebesgue-Integrals:

(i) $\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$;

(ii) aus $f = g$ μ-f.ü. folgt $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$;

(iii) aus $f \geq 0$ und $\int f\, d\mu = 0$ folgt $f = 0$ μ-f.ü..

3.Aufgabe: Sei (f_n) eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen:

(i) Mit Hilfe des Satzes über die monotone Konvergenz beweise man den Satz von Fatou:

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

(ii) Man gebe ein Beispiel an, wo selbst aus $f_n \downarrow f$ für messbares f

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \neq \int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu$$

folgt.

4.Aufgabe: Es seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Man zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mu \ll \nu$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt: aus $\nu(A) < \delta$ folgt $\mu(A) < \varepsilon$.

Jede Aufgabe 6 Punkte