Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

2.Blatt
Übungen 25.10.05
Abgaben bis 01.11.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe:

(i) Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in \{1,2,3\}$ messbare Räume und $f_i : \Omega_i \to \Omega_{i+1}$ $\mathcal{A}_i$-$\mathcal{A}_{i+1}$-messbare Funktionen; man zeige, dass $f_2 \circ f_1 : \Omega_1 \to \Omega_3$ ebenfalls eine messbare Funktion ist.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare numerische Funktionen, man zeige, dass die folgenden Funktionen wiederum numerisch messbar sind:

(ii) $\sup f_n$ (definiert durch $(\sup f_n)(\omega) := \sup f_n(\omega)$),

(iii) $\limsup_{n\to\infty} f_n$ (definiert durch $(\limsup_{n\to\infty} f_n)(\omega) := \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega)$).

2.Aufgabe: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen, man zeige, dass die folgenden Funktionen wiederum messbar sind:

(i) $f + g$ (definiert durch $(f+g)(\omega) := f(\omega) + g(\omega)$),

(ii) f^2 (definiert durch $f^2(\omega) := (f(\omega))^2$),

(iii) $f \cdot g$ (definiert durch $(f \cdot g)(\omega) := f(\omega)g(\omega)$).

3.Aufgabe: Sei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{S}$ die Menge aller symmetrischen Borelmengen, also

$$\mathcal{S} := \{A \in \mathcal{B} : x \in A \Rightarrow -x \in A\}.$$

(i) Man zeige, dass $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist.

(ii) Welche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind $\mathcal{S}$-$\mathcal{B}$-messbar?

4.Aufgabe: Man zeige, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist.

Jede Aufgabe 6 Punkte