Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

13. und letztes Blatt
Übungen 31.01.06
Abgaben bis 07.02.06

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Es sei μ_n die vorgegebene Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Man untersuche, ob ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ existiert, so dass $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ gilt und gebe es (so es existiert) an:

(i) $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{i}{n}}$, wobei δ_x das Dirac-Maß auf x bezeichnet;

(ii) $\mu_n := b(n, \frac{\lambda}{n})$, $\lambda > 0$, wobei $b(m,p)$ die Binomialverteilung mit den Parametern m und p ist;

(iii) $\mu_n := u([-n,n])$, wobei $u(A)$ die Gleichverteilung auf A ist.

2.Aufgabe: Für ein $\alpha > 0$ seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige und identisch auf $[0, \alpha]$ gleichverteilte Zufallsgrößen. Weiterhin sei $Y_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $Z_n := n(\alpha - Y_n)$ und $\mu_n := P \circ Z_n^{-1}$. Man zeige, dass $\mu_n \xrightarrow{w} \mu^\alpha$, wobei μ^α die Exponentialverteilung zum Parameter $1/\alpha$ bezeichnet.

3.Aufgabe: Man zeige, dass μ_n genau dann schwach gegen μ konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int f \, d\mu_n = \int f \, d\mu$$

für alle gleichmäßig stetigen Funktionen $f \in C(E)$ gilt.
Hinweis: Hierzu zeige man, dass für abgeschlossene $F \subseteq E$

$$f_m(x) := e^{-m\rho(x,F)}$$

eine gleichmäßig stetige Approximation von 1_F ist.

Jede Aufgabe 8 Punkte

Zusatzaufgabe: Es seien X_n, X reellwertige Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Man zeige in den folgenden Schritten, dass die schwache Konvergenz und die Konvergenz der charakteistischen Funktionen äquivalent sind, das heißt $\chi_{X_n}(t) \to \chi_X(t)$ für alle t genau dann, wenn
$P \circ X_n^{-1} =: \mu_n \xrightarrow{w} \mu := P \circ X^{-1}$:

(i) Aus schwacher Konvergenz folgt die Konvergenz der charakteristischen Funktionen.

(ii) Aus der Konvergenz der charakteristischen Funktionen folgt, dass für jedes kompaktes Intervall $K \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f \, d\mu_n = \int_K f \, d\mu \qquad \forall f \in C(\mathbb{R})$$

gilt. (Hierbei darf der Approximationssatz von Weierstraß für trigonometrische Polynome verwendet werden: die trigonometrischen Polynome liegen bezüglich der Supremumsnorm dicht in der Menge der stetigen Funktionen auf K).

(iii) Man zeige: Aus $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ folgt für die kompakten Intervalle $K_c := [-c, c]$

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R} \setminus K_c) \downarrow 0 \qquad \text{für } c \to \infty.$$

(iv) Mittels (ii) und (iii) schließe man, dass aus der Konvergenz der charakteristischen Funktionen die schwache Konvergenz folgt.

10 Punkte