Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

12.Blatt
Übungen 23.01.06
Abgaben bis 30.01.06

Hausaufgaben

1.Aufgabe:

(i) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T : \Omega \to \Omega$ eine maßerhaltende Transformation. Man zeige, dass für $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$E[X] = E[X \circ T]$$

gilt.

(ii) Sei nun $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$ und $T(\omega) := a\omega + b$. Unter welchen Bedingungen an a und b ist T maßerhaltend?

2.Aufgabe: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $T : \Omega \to \Omega$ eine maßerhaltende Transformation und $\mathcal{J}$ die σ-Algebra der T-invarianten Ereignisse. Man zeige, dass T genau dann ergodisch ist, wenn

$$E[f \mid \mathcal{J}] = E[f] \quad P\text{-fast sicher}$$

für alle $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gilt.

3.Aufgabe: Ein Bäcker walkt den Teig so lange aus, bis er doppelt so lang ist, halbiert ihn der Länge nach und legt den weggeschnittenen Teil auf den ursprünglichen. Dieser Vorgang wird nicht nur bis zur völligen Erschöpung des Bäckers wiederholt, sondern darüber hinaus ad infinitum. Der Einfachheit halber betrachten wir den Teig als Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$ und P das Lebesgue-Maß ist. Die Zubereitung des Teiges wird durch die Transformation $T : \Omega \to \Omega$,

$$T(\omega) = \begin{cases} 2\omega & \text{für } \omega \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2\omega - 1 & \text{für } \omega \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

beschrieben. Wird der Teig durch diesen Zubereitungsvorgang gut durchgeknetet, das heißt ist T mischend?
Hinweis: Man betrachte Mengen der Gestalt $[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}] \cap T^{-n}B$.

4.Aufgabe: Es sei $(X_n), n \in \mathbb{N}_0$, ein stationärer reellwertiger Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ und $c > 0$ eine Konstante. Man beweise Wieners Maximalungleichung

$$P\left(\max_{1 \le k \le n} \frac{S_k}{k} > c\right) \le \frac{E[|X_0|]}{c}$$

mit Hilfe des Maximal-Ergodenlemmas von Hopf angewendet auf $\tilde{X} := X_0 - c1_A$ mit $A := \{\omega : \max_{1 \le k \le n} S_k/k > c\}$.

Jede Aufgabe 6 Punkte

Hinweise:

- Das Skript zu Wahrscheinlichkeitstheorie 1 ist ab sofort unter *http://www.math.tu-berlin.de/~ststurm/wt1/wt1.html* als .pdf oder .ps-file herunterzuladen.
- Eine Übersicht über das Lehrangebot in Stochastik in den nächsten Semestern findet man unter *http://www.math.tu-berlin.de/stoch/lehre.html*.