Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

11.Blatt
Übungen 17.01.06
Abgaben bis 24.01.06

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Es sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Wienerprozess.

(i) Man zeige, dass $(\widehat{W}_t)_{t\in[0,\infty)}$, $\widehat{W}_t := \alpha W_{t/\alpha^2}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, wiederum ein Wienerprozess ist.

(ii) Man zeige, dass $(\widetilde{W}_t)_{t\in[0,\infty)}$, $\widetilde{W}_t := W_{t+h} - W_h$ für ein $h > 0$, ebenso wieder ein Wienerprozess ist.

(iii) Man zeige, dass $(B_t)_{t\in[0,1]}$, $B_t := W_t - tW_1$ ein Gaußprozess auf $[0,1]$ mit Mittelwertfunktion $m(t) = 0$ und Kovarianzfunktion $k(s,t) = s \wedge t \cdot (1 - s \vee t)$ ist.

2.Aufgabe: Es sei (W_t) ein Wienerprozess.

(i) Man zeige, dass

$$I(\omega) := \int_0^1 W_s(\omega)\, ds.$$

$\mathcal{N}(0, 1/3)$-verteilt ist.

(ii) Mit Hilfe des Satzes von Fubini beweise man, dass die Nullstellenmenge von (W_t) im Intervall $[0,1]$,

$$N(\omega) = \{t \in [0,1] : W_t(\omega) = 0\} \in \mathcal{B}_{[0,1]},$$

eine Lebesgue-Nullmenge ist.

3.Aufgabe:

(i) Man zeige, dass zu jedem $\gamma > 0$ ein $c_\gamma > 0$ existiert, so dass für alle $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen ξ mit $\sigma > 0$

$$E\left[|\xi|^\gamma\right] \leq c_\gamma \sigma^\gamma.$$

gilt.

(ii) Es sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Wienerprozess. Man zeige, dass für jedes $\alpha \in (0, 1/2)$ fast alle Pfade von W Hölderstetig mit Exponent α sind.

4.Aufgabe: Es sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Wienerprozess und $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$. Man zeige,

(i) dass $(W_t^2 - t)$ ein Martingal bezüglich der von (W_t) erzeugten Filtration $(\mathcal{F}_t^W)$ ist;

(ii) dass ebenso $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t^N)$ ist;

(iii) Man zeige, dass die Pfade von (N_t) nicht fast sicher stetig, aber stetig in L^2 und somit in Wahrscheinlichkeit sind.

Jede Aufgabe 6 Punkte