Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

10.Blatt
Übungen 10.01.06
Abgaben bis 17.01.06

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Es sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{A}$ eine Algebra auf Ω und μ eine endliche und additive Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. Man zeige, dass μ genau dann σ-additiv ist, wenn μ stetig in Null ist. (Eine Mengenfunktion μ heißt stetig in Null, falls für jede Folge (A_n), $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ gilt, dass $\mu(A_n) \downarrow 0$.)

2.Aufgabe: Es sei $C = C[0,T]$ der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,T]$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\omega\| := \sup_{t\in[0,T]} |\omega(t)|$ und der daraus erzeugten Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_C$. Für endlich viele Zeitpunkte $0 \le t_1 < \dots t_n \le T$ sei die endlich-dimensionale Projektion $\pi_{t_1,\dots,t_n} : C \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\pi_{t_1,\dots,t_n}(\omega) = (\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)).$$

(i) Man zeige, dass die endlich-dimensionalen Projektionen stetig sind.

(ii) Das System aller *Zylindermengen*, das heißt aller Mengen der Gestalt $\pi^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}$. Man zeige, dass jede abgeschlossene Kugel in C in der von den Zylindermengen erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{Z})$ liegt.

(iii) Man zeige $\mathcal{B}_C = \sigma(\mathcal{Z})$. (Hinweis: Hier darf die Eigenschaft, dass C separabel ist, ohne Beweis verwendet werden.)

3.Aufgabe: Es sei $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein reellwertiger Prozess mit stetigen Pfaden.

(i) Man zeige, dass

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \longrightarrow & C = C[0,T] \\ \omega & \mapsto & X_\cdot(\omega) \end{array}$$

eine C-wertige Zufallsvariable ist.

(ii) Es sei $P_X = P \circ X^{-1}$ die Verteilung von X auf C. Man zeige, dass der Prozess $(\pi_t)_{t\in[0,T]}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(C, \mathcal{B}_C, P_X)$ stetige Pfade hat und dass seine endlich-dimensionalen Verteilungen mit denen von $(X_t)_{t\in[0,T]}$ übereinstimmen. (Dies ist das *kanonische Modell* für einen Prozess mit stetigen Pfaden.)

4.Aufgabe: Es sei ξ eine exponentialverteilte Zufallsgröße auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(i) Wir definieren für $t \in [0,\infty)$

$$X_t(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t = \xi(\omega); \\ 0 & \text{falls } t \neq \xi(\omega). \end{cases}$$

Man zeige, dass $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein stochastischer Prozess ist, der die Modifikation$\widetilde{X}_t(\omega) \equiv 0$ besitzt.

(ii) Man zeige, dass der stochastische Prozess

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t < \xi(\omega); \\ 0 & \text{falls } t \ge \xi(\omega), \end{cases}$$

$t \in [0,\infty)$, keine stetige Modifikation besitzt.

Jede Aufgabe 6 Punkte