

Technische Universität Berlin  
Fakultät II - Institut für Mathematik  
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner  
Übung: Stephan Sturm  
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

# Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

*1. Blatt*  
Übungen 18.10.05  
Abgaben bis 25.10.05

## Hausaufgaben

**1. Aufgabe:** Sei  $I$  eine Indexmenge,  $X$  eine Menge mit einer Familie von Teilmengen  $\{A_i\}_{i \in I}$ ,  $Y$  eine weitere Menge mit  $\{B_i\}_{i \in I}$  und  $f : X \rightarrow Y$ . Man zeige

- (i)  $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ ,
- (ii)  $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ ,
- (iii)  $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ ,
- (iv)  $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ ,
- (v) Man gebe ein Beispiel an, wo die Inklusion in (iv) echt ist.

**2. Aufgabe:** Man zeige, dass die Durchschnittsstabilität im Satz von Carathéodory tatsächlich eine notwendige Bedingung ist: Für  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$  konstruiere man auf der von  $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{E})$  zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf  $\mathcal{E}$  übereinstimmen.

**3. Aufgabe:**

- (i) Man gebe zwei  $\sigma$ -Algebren auf einer Menge  $\Omega$  an, deren Vereinigung keine  $\sigma$ -Algebra ist.
- (ii) Man finde ein Dynkin-System, das keine  $\sigma$ -Algebra ist.

**4. Aufgabe:** Sei  $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$ . Man zeige, dass  $\mathcal{A}$  eine Algebra, aber keine  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{N}$  ist.