Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

8. Übung

Optional Sampling, Optional Stopping und Irrfahrten

Die beiden zentralen Sätze über Stoppzeiten und Martingale siind das Optional Sampling- und das Optional Stopping-Theorem:

Satz 1 (Optional Sampling) *Es sei (X_n) ein Supermartingal (Martingal) auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega, \mathcal{F}, P)$. Falls*

- *σ und τ beschränkt sind ($\sigma \le \tau \le M < \infty$) oder*
- *σ und τ P-fast sicher endlich sind ($\sigma \le \tau < \infty$) und (X_n) gleichgradig integrierbar ist,*

gilt

$$E[X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma] \le X_\sigma$$

bzw.

$$E[X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma.$$

Diese Aussage lässt sich noch verschärfen, indem man keine Ordnung der Stoppzeiten verlangt, dann gilt:

$$E[X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma] \le X_{\sigma\wedge\tau}.$$

Die Monotonie des Erwartungswetes liefert natürlich sofort Korollare wie

$$E[X_\tau] \ge E[X_\sigma] \ge E[X_0]$$

für ein Submartingal (X_n) und Stoppzeiten σ, τ wie oben. Für die gestoppte Folge $(X_n^\tau) := (X_{n\wedge\tau})$ gilt

Satz 2 (Optional Stopping) *Ist τ eine Stoppzeit und (X_n) ein (Sub-,Super-)Martingal, so ist (X_n^τ) wieder ein (Sub-, Super-)Martingal, bezüglich $(\mathcal{F}_n)$ wie auch bezüglich $(\mathcal{F}_n^\tau) := (\mathcal{F}_{n\wedge\tau})$.*

Für eine beschränkte Stoppzeite τ und ein Martingal (X_n) folgt

$$E[X_n^\tau] = E[X_{n\wedge\tau}] \xrightarrow{n\to\infty} E[X_\tau].$$

Dies gilt wiederum auch für P-fast sicher endliche Stoppzeiten und gleichgradig integrierbare Martingale. Die Einschränkungen sind tatsächlich notwendig, das klassische Gegenbeispiel liefert die einfache, symmetrische Irrfahrt:

Beispiel 1 *: Sei (X_n) eine einfache symmetrische Irrfahrt, also $X_0 = 0$, $X_n := \sum_{i=1}^n Y_i$, wobei die Y_i unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $P[Y_i = 1] = P[Y_i = -1] = 1/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (X_n) klarerweise ein Martingal (siehe Vorlesung, Beispiel 4.8). Ist weiterhin $\tau := \inf\{n : X_n = a\}$ die Zeit des ersten Erreichens von $a \in \mathbb{N}$, $a > 0$, so ist*

(i) *τ nicht beschränkt;*

(ii) *τ P-fast sicher beschränkt;*

(iii) *aber (X_n) ist nicht gleichgradig integrierbar, da sonst*

$$0 = E[X_0] = E[X_0^\tau] = \lim_{n\to\infty} E[X_n^\tau] = \lim_{n\to\infty} E[X_{n\wedge\tau}] = E[X_\tau] = a$$

folgen würde, ein Widerspruch zur gleichgradigen Integrierbarkeit.

Beweis

(i) Wir wählen einfach $Y_1 = Y_2 = \ldots = -1$.

(ii) Wir schätzen erst einmal die Wahrscheinlichkeit, dass wir ein Intervall (b,a), $b < 0 < a$ verlassen, nach oben ab: Sei $x \in (b,a)$ beliebig, nun ist

$$P[x + X_{a-b} \notin (b,a)] \geq 2^{-(a-b)},$$

da uns $a-b$ Schritte nach oben uns jedenfalls aus dem Intervall hinaus führen. n-maliges wiederholen liefert für $\sigma := \inf\{n : X_n \notin (b,a)\}$

$$P[\sigma > n(b-a)] \leq P\left[\bigcup_{i=1}^{n}\{X_{i(a-b)} \in (b,a)\}\right] = (1 - P[x + X_{a-b} \notin (b,a)])^n \leq \left(1 - 2^{-(a-b)}\right)^n,$$

somit ist $E[\sigma] = \sum_n P[\sigma > n] < \infty$. Wegen der Unabhängigkeit von X_i und σ folgt mit Aufgabe 3(ii) vom 5.Übungsblatt ("Waldsche Identität")

$$aP[X_\sigma = a] + bP[X_\sigma = b] = E[X_\sigma] = E[\sigma]E[X_i] = 0.$$

Nun ist aber $P[X_\sigma = b] + P[X_\sigma = a] = 1$ und es folgt $(a-b)P[X_\sigma = a] = -b$ und somit

$$P[X_\sigma = a] = \frac{-b}{a-b} \qquad \text{bzw.} \qquad P[X_\sigma = b] = \frac{a}{a-b}.$$

Für $\tau_b := \inf\{n : X_n = b\}$ folgt somit

$$P[\tau_b < \tau] = \frac{a}{a-b}.$$

Setzen wir nun $a = M$ und betrachten $M \to \infty$, so folgt

$$P[\tau < \infty] \geq P[\tau < \tau_M] \xrightarrow{M \to \infty} 1.$$

Analoges gilt natürlich auch für b, also für beliebiges $x \neq 0$. Allerdings gilt $E[\tau_x = \infty]$, da anderenfalls aus $E[\tau_x < \infty]$ wegen der Waldschen Identität (s.o)

$$x = E[X_{\tau_x}] = E[X_1]E[\tau_x] = 0$$

folgen würde, ein Widerspruch. Einen alternativen Beweis findet man z.B. bei *David Williams, Probability with Matingales, Cambridge 1991.*

(iii) Wegen (ii) können wir eine Stoppzeit $\tilde{\tau} := 1_{\tau<\infty}\tau$ definieren. Nun ist, ebenfalls mit (ii) und dem Martingalkonvergenzsatz, $\lim_n E[X_n^{\tilde{\tau}}] = \lim_n E[X_{n\wedge\tilde{\tau}}] = E[X_{\tilde{\tau}}] = a$ P-fast sicher, andereseits gilt aber $E[X_0^{\tilde{\tau}} = 0] = E[X_0] = 0$. Dies widerspricht aber der Eigenschaft $E[X_{\tilde{\tau}}] = E[X_0]$, die für Martingale und endliche Stoppzeiten gilt.