Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

9.Blatt
Übungen 04.01.05
Abgaben bis 11.01.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P heißt mischend, falls

$$P\left[A \cap T^{-n}(B)\right] \longrightarrow P[A] \cdot P[B] \qquad \text{für} \qquad n \to \infty.$$

Man zeige:

a) Ist P mischend, so ist es auch ergodisch.

b) Die Umkehrung gilt allerdings nicht, der α-Shift auf dem eindimensionalen Torus (vgl. Vorlesung, Beispiel nach Lemma 1.2) ist zwar ergodisch für irrationales α, nicht aber mischend.

2.Aufgabe: Sei $K(x, \cdot) = \mathcal{N}(\alpha x, \sigma^2)$, d.h.

$$\int f(y) K(x, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int f(y) e^{-\frac{(y-\alpha x)^2}{2\sigma^2}}\, dy.$$

Dann ist durch K ein stochastischer Kern von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definiert (vgl. Vorlesung, Kap. IV.1.).
Man zeige: Für $|\alpha| < 1$ ist

$$\mu := \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right)$$

eine Gleichgewichtsverteilung für K, d.h. es gilt $\mu K = \mu$.

3.Aufgabe: Seien (Y, Z) unabhängige Zufallsvariablen auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ mit Gleichverteilung auf $[0, 1]$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}([0, 1]) \otimes \mathcal{B}([0, 1])$ und P die Verteilung von (Y, YZ). Dann ist P von der Form $\mu \otimes K$ (vgl. Vorlesung, Korollar IV.1.6).

a) Man bestimme μ und K sowie die bedingte Dichte von P bezüglich des Lebesguemaßes und gegeben der ersten Koordinate.

b) Sei nun Q die Verteilung von (YZ, Y). Dann ist Q wieder von der Form $\nu \otimes R$ mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ν und einem Kern R. Wiederum bestimme man ν, R und die bedingte Dichte von Q bezüglich des Lebesguemaßes und gegeben der ersten Koordinate.

Jede Aufgabe 8 Punkte