

# Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

8. Blatt  
 Übungen 14.11.04  
 Abgaben bis 04.01.05

## Hausaufgaben

**1. Aufgabe:** Seien  $Y_i, i = 1, 2, \dots$  unabhängige und identisch verteilte  $S$ -wertige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

a) Für  $f \in C(S)$  definieren wir

$$f_0(z) := f(z), \quad f_n(z) := E \left[ f \left( z \cdot \prod_{i=1}^n Y_i \right) \right].$$

Man zeige, dass die Familie  $(f_n)_n$  gleichmäßig und gleichgradig stetig ist.

b) Sei nun  $m_n := \max_{z \in S} f_n(z)$ . Dann ist die Folge  $m_n$  monoton fallend und nach unten beschränkt, somit existiert  $m := \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ .

\*c) Ist  $f$  nicht konstant und sind die  $Y_i$  so gewählt, dass der Träger der Verteilung nicht die Zacken einer Schneeflocke bildet (d.h., dass er nicht in einem regulären Polygon enthalten ist), so gibt es ein  $n$  mit  $f_n < m_0$ .

**2. Aufgabe:** Im Folgenden verwenden wir dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in der 1. Aufgabe.

a) Aus der Aufgabe 1 a)-c) folgere man den folgenden Satz von Lévy: Die Verteilung von  $\prod_{i=1}^n Y_i$  konvergiert gegen die Gleichverteilung auf  $S$ , falls der Träger der Verteilung nicht in einem regulären Polygon enthalten ist.

b) Seien nun  $X_i, i = 1, 2, \dots$  unabhängige und identische verteilte, positive Zufallsvariable, deren Träger mindestens zwei Punkte mit irrationalem Abstand voneinander enthält und  $D(x)$  die führende Ziffer von  $x > 0$ . Man beweise jetzt Satz III.4.3 der Vorlesung, das Benfordsche Gesetz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ D \left( \prod_{i=1}^n X_i \right) = k \right] = \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$$

für  $k \in \{1, \dots, 9\}$ .

**3. Aufgabe:** Sei  $X_n, n = 0, 1, \dots$  ein stationärer reellwertiger Prozess auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k, c > 0$ ; man zeige, dass Wieners Maximalungleichung

$$P \left[ \max_{1 \leq k \leq n} \frac{S_k}{k} > c \right] \leq \frac{E[|X_0|]}{c}$$

gilt.

*Hinweis:* Man wende die Maximalungleichung  $E[\tilde{X}; \tilde{M}_n > 0] \geq 0$  (Satz III.3.2 der Vorlesung) auf  $\tilde{X} := X_0 - cI_A$  mit  $A = \{\max_{1 \leq k \leq n} S_k/k > c\}$  an.

**Weihnachtsaufgabe:** Um Weihnachtskekse zu backen, walzt ein/e Bäcker/in den Teig so lange aus, bis er doppelt so lang und halb so dick ist (die Breite bleibt unverändert und wird im Folgenden nicht berücksichtigt). Danach wird der Teig der Länge nach halbiert und der weggeschnittene Teil auf den ursprünglichen gelegt. Dieser Vorgang wird nicht nur bis zur völligen Erschöpfung des/der Bäcker/in wiederholt, sondern darüber hinaus ad infinitum. Der Einfachheit halber betrachte man den Teig als Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , wobei  $\Omega = [0, 1]^2$ ,  $\mathcal{A}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra und  $P$  das Lebesgue-Maß. Die durch das Zubereiten des Teiges beschriebene Transformation ist

$$T(\omega^1, \omega^2) = \begin{cases} \left(2\omega^1, \frac{\omega^2}{2}\right) & \text{für } \omega^1 \in [0, \frac{1}{2}[ \\ \left(2\omega^1 - 1, \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2}\right) & \text{für } \omega^1 \in [\frac{1}{2}, 1[. \end{cases}$$

Wird der Teig durch diesen Zubereitungsvorgang gut durchgeknetet, d.h. ist  $P$  unter dieser Transformation ergodisch?