Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

7.Blatt
Übungen 07.11.04
Abgaben bis 14.12.04

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Man betrachte das folgende Würfelspiel: Ein/e Spieler/in darf maximal N mal würfeln und gewinnt mit jedem Wurf, der keine Eins liefert, genau so viele Euro zu seinem Vermögen (Anfangsvermögen 0) hinzu, wie viele Augen der Würfel zählt. Würfelt er/sie hingegen eine Eins, verliert er/sie das gesamte Vermögen. Man berechne eine Stoppstrategie, so dass der erwartete Gewinn maximiert wird.

2.Aufgabe: Sei (X_n) eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen und

$$X_n^K(\omega) := X_n(\omega) I_{\{|X_n(\omega)| \leq K\}}$$

für ein $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$. Man zeige, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n$ konvergiert P-f.s.

(ii) Die drei folgenden Aussagen gelten für ein $K > 0$:

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P[|X_n| > K] < \infty$,
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} E[X_n^K]$ konvergiert,
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{var}(X_n^K) < \infty$.

(iii) Die Aussagen aus (ii) gelten für jedes $K > 0$.

Hinweis: Für (ii) $\Rightarrow$ (i) zeige man, dass aus der ersten Aussage mittels Borel-Cantelli-Lemma folgt, dass es hinreichend ist, die P-fast sichere Konvergenz von X_n^K zu beweisen und verwende dann, dass $M_n^K := \sum_{i=0}^n \left(X_n^K - E[X_n^K]\right)$ ein quadratintegrierbares Martingal ist.

3.Aufgabe: Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \Omega = [0, 1[^d$ sei die Transformation $T : \Omega \to \Omega$ definiert durch

$$(T\omega)_i := (\omega_i + \alpha_i) \bmod 1.$$

Unter welchen Voraussetzungen an α ist das Lebesguemaß P ergodisch bezüglich T?

4.Aufgabe: Seien $Y_1, Y_2, \ldots \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable und $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Man zeige, dass

$$E\left[\sup_{n\geq 1}\left|\frac{S_n}{n}\right|\right] < \infty \qquad \text{falls} \qquad E\left[|Y_1| \log |Y_1|\right] < \infty.$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass diese Bedingungen sogar äquivalent sind.

Jede Aufgabe 6 Punkte