Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

6.Blatt
Übungen 30.11.04
Abgaben bis 07.12.04

Hausaufgaben

1.Aufgabe:

a) Sei (X_n) ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{G}_n)$, $n = 0, 1, \dots$ und $\mathcal{F}_n$ eine weitere Filtration mit $\sigma(X_0, \dots, X_n) \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$. Man zeige, dass (X_n) auch ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)$ ist und Vergleiche dieses Ergebnis mit demjenigen der 3.Aufgabe des 3.Übungsblattes.

b) Gegeben sei ein Supermartingal $(X_n) \geq 0$, $n = 0, 1, \dots$; man zeige, dass $\tau := \inf\{n : X_n = 0\}$ eine Stoppzeit ist und dass $X_n = 0$ P-f.s. auf $\{\tau < n\}$.

2.Aufgabe: *Polyas Urnenmodell*: Eine Urne enthalte s schwarze und w weisse Kugeln. In jeder Periode wird eine Kugel zufällig gezogen und durch t Kugeln der gezogenen Farbe ersetzt. Die Zufallsvariable Y_n gebe das Verhältnis der Anzahl der schwarzen zur Gesamtzahl der Kugeln in der Urne nach der n-ten Periode an.

a) Man zeige, dass (Y_n) ein P-f.s. konvergentes Martingal ist.

b) Für $s = w = 1$ und $t = 2$ zeige man, dass die Zufallsvariable Y_∞ gleichverteilt ist.

3.Aufgabe: Sei $S_n = x + Y_1 + \ldots + Y_n$, $Y_i \in \{-1, 1\}$ ein Random Walk mit Parameter $p = 1/2$ gestartet in $S_0 = x$. Weiterhin seien $a, b \in \mathbb{Z}$ fest mit $a < x < b$ sowie $X_n = S_n^T$ der in $T = \inf\{n : S_n \in \{a, b\}\}$ gestoppte Random Walk.
Ziel ist es, den Erwartungswert $E[g(X_\tau)]$ über alle P-f.s endlichen Stoppzeiten τ zu maximieren, wobei $g : [a, b] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion sei. Dazu definieren wir $\tilde{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ als kleinste konkave Majorante von g.
Man zeige:

$$\tilde{g}(x) = E[g(X_{\tau^*})] = \max_\tau E[g(X_\tau)]$$

wobei

$$\tau^* = \inf\{n : g(X_n) = \tilde{g}(X_n)\}.$$

Hinweis: Ähnlich wie im Satz von Snell zeige man, dass $U_n := \tilde{g}(X_n)$ ein Supermartingal $\geq g(X_n)$ und U^{τ^*} ein Martingal ist.

Jede Aufgabe 8 Punkte