Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

5.Blatt
Übungen 23.11.04
Abgaben bis 30.11.04

Übungen

Aufgabe: Sei (X_n) ein Submartingal auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n), P)$ und σ, τ zwei Stoppzeiten mit

$$\sigma(\omega) \leq \tau(\omega) \leq M < \infty,$$

für jedes ω; man zeige, dass

$$X_\sigma \leq E[X_\tau \,|\mathcal{A}_\sigma\,] \text{ P-fast sicher.}$$

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Sei (X_n) an $(\mathcal{A})_n$ adaptiert, $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Man zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

i) X ist Supermartingal

ii) X^τ ist ein Supermartingal für jede Stoppzeit τ.

2.Aufgabe: Man zeige: Für jedes Submartingal ≥ 0 oder Martingal(X_n) auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt:

$$E\left[\exp\left(\max_{n \leq N} X_n\right)\right] \leq E\left[\exp\left(1 + X_N\right)\right].$$

3.Aufgabe: Sei $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Q sei lokal absolutstetig bezüglich P mit Dichte Z_n auf $\mathcal{A}_n$. Für $Z_\infty := \lim_n Z_n$ ist dann

$$Q[A] = \int_A Z_\infty \, dP + Q\left[A \cap \{Z_\infty = \infty\}\right]$$

die Lebesgue-Zerlegung von Q bezüglich P auf $\mathcal{A}_\infty$ (vgl. Vorlesung). Man zeige:

a) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} E_P\left[\sqrt{Z_n}\right] = 0$ folgt $Q \perp P$, aus der Konvergenz von $\sqrt{(Z_n)}$ in $L^2(P)$ folgt $Q \ll P$.

b) $Y_1, Y_2, \dots$ seien unabhängig unter Q und bzw. P, mit Verteilungen μ_i unter P und $\nu_i \ll \mu_i$ unter Q. Für $h_i := d\nu_i/d\mu_i$ ist dann

$$Z_n = \prod_{i=1}^n h_i(Y_i)$$

die Dichte von Q bzgl. P auf $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Benutze a), um das folgende *Kriterium von Kakutani* zu beweisen:

$$\prod_{i=1}^\infty \int \sqrt{h_i}\, d\mu_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q \perp P \text{ auf } \mathcal{A}_\infty$$

$$\prod_{i=1}^\infty \int \sqrt{h_i}\, d\mu_i > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q \ll P \text{ auf } \mathcal{A}_\infty\,.$$

4.Aufgabe: Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν auf einem messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$ ist der *Kakutani-Hellinger-Abstand* $d(\mu, \nu)$ von μ und ν gegeben durch

$$d(\mu,\nu) = \sqrt{\frac{1}{2}\int \left(\sqrt{\frac{d\mu}{d\eta}} - \sqrt{\frac{d\nu}{d\eta}}\right)^2 d\eta},$$

wobei η ein Maß mit $\mu \ll \eta$ und $\nu \ll \eta$ bezeichnet.
Man zeige:

a) $d(\mu,\nu)$ hängt nicht von der Wahl von η ab, insbesondere gilt die Darstellung

$$d(\mu,\nu)^2 = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{\frac{d\nu}{d\mu}} - 1\right)^2 d\mu + \frac{1}{2}\,\nu\left(\frac{d\nu}{d\mu} = \infty\right),$$

wobei $d\nu/d\mu$ eine Dichte im Sinne der Lebesgue-Zerlegung bezeichne.

b) d ist eine Metrik auf der Menge $\mathcal{M}_1(S, \mathcal{S})$ aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(S, \mathcal{S})$.

c) Sei nun $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ und $Y_n(\omega) = \omega(n)$. P und Q seien nun zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen, unter denen die $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängig sind und zwar mit den Verteilungen $\mu_1, \mu_2, \dots$ bzw. $\nu_1, \nu_2, \dots$. Wir nehmen an, dass $\nu_n \ll \mu_n$ für alle n gilt. Dann folgt aus dem *Kriterium von Kakutani* (siehe 3.Aufgabe), dass

$$Q \ll P \text{ auf } \mathcal{A}_\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty d(\mu_n,\nu_n)^2 < \infty$$

$$Q \perp P \text{ auf } \mathcal{A}_\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty d(\mu_n,\nu_n)^2 = \infty.$$