Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

4.Blatt
Übungen 16.11.04
Abgaben bis 23.11.04

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Sei $(\mathcal{A}_n)$ eine Filtration von $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, man zeige:

a) Für eine Stoppzeit τ ist
$$\mathcal{A}_\tau := \{\, A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{A}_n \text{ für alle } n \,\}$$
eine σ-Algebra und es gilt $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathcal{A}_\tau$, falls σ eine Stoppzeit mit $\sigma \leq \tau$ ist.

b) Mit τ und σ sind auch $\tau + \sigma$, $\tau \vee \sigma$ und $\tau \wedge \sigma$ Stoppzeiten.

c) Sei X_n eine adaptierte Folge von $(S, \mathcal{S})$-wertigen Zufallsvariablen und $A \in \mathcal{S}$; falls σ eine Stoppzeit ist, so auch
$$\tau := \inf\{n \geq \sigma : X_n \in A\}.$$
Diese Tatsache wurde im Beweis von *Doob's upcrossing inequality* (Lemma II.3.1) verwendet.

2.Aufgabe: Sei (X_n) ein Martingal auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n), P)$ und $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{A}_n)$, man zeige dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $\sup_n E[X_n^2] < \infty$.

ii) $X_n \to X_\infty$ in $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

iii) Es existiert ein X in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n = E[X \,|\mathcal{A}_n]$.

3.Aufgabe: Für den Random Walk (X_n) mit Parameter $p = 1/2$ und Startpunkt 0 sei für ein $a > 0$
$$\tau := \min\{n \geq 0 \,:\, X_n = a\}.$$
Man berechne die Laplace-Transformierte $E[\exp(-\lambda\tau)]$, $\lambda \geq 0$.
Hinweis: Man bestimme α so, daß $M_n := \exp(\alpha X_n - \lambda n)$ ein Martingal wird, und wende den Stoppsatz an.