Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

3.Blatt
Übungen 09.11.04
Abgaben bis 16.11.04

Übungen

Aufgabe: Sei $0 = t_0 < t_1 < \cdots$ eine Folge und $s_0 < s_1 < \cdots < s_n$ eine beliebige Teilfolge, so dass (M_{t_i}) ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{A}_{t_i})$ und ξ_{t_i} eine beschränkte Folge, ebenfalls adaptiert an $(\mathcal{A}_{t_i})$, ist. Man zeige, dass das Spielsystem

$$S_k := \sum_{i=1}^{n} \xi_{t_{i-1}} \left(M_{t_i \wedge s_k} - M_{t_{i-1} \wedge s_k} \right), \quad k = 1, \ldots, n$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{A}_{s_k})$ ist.

Hausaufgaben

1.Aufgabe: $X_1, X_2, \ldots X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen und $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Man berechne

$$E\left[X_n \mid S_n\right].$$

2.Aufgabe: Man zeige, dass für $Z \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die Familie von Zufallsvariablen

$$\{E\left[Z \mid \mathcal{B}\right] \;:\; \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \;\sigma\text{-Algebra}\}$$

gleichmässig integrierbar ist.

3.Aufgabe: Seien $Y_i,\ i = 1, \ldots, N$ unabhängige, zentrierte, identisch verteilte Zufallsvariablen aus $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die nicht konstant null sind. Weiters sei $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ und (X_n), definiert durch

$$\begin{aligned} X_n &:= \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad n = 1, \ldots, N \\ X_0 &:= 0, \end{aligned}$$

ist bezüglich $(\mathcal{A}_n)$ ein Martingal. Wir erweitern nun die Filtration um die durch den Endwert X_N gegebene *Insider-Information*, gehen also zu

$$\widetilde{\mathcal{A}}_n := \sigma(\mathcal{A}_n, X_N)$$

über. Man zeige:

a) Bezüglich $(\widetilde{\mathcal{A}}_n)$ ist (X_n) kein Martingal mehr, dafür aber der Prozeß

$$\widetilde{X}_n := X_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{N-k}(X_N - X_k).$$

b) Mit der Information über X_N sind bezüglich (X_n) Spielsysteme mit positivem mittleren Gewinn möglich. Man bestimme eine Strategie (ξ_n) die unter allen $(\widetilde{\mathcal{A}}_n)$-prävisiblen, durch 1 beschränkten Strategien den zu erwartenden Gewinn maximiert.

Man nennt die Erweiterung von $(\mathcal{A}_n)$ zu $(\widetilde{\mathcal{A}}_n)$ ein *grossissement des tribus* (eine "Vergrößerung der σ-Algebren", bzw. eine *Filtrationsvergrößerung*).