Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

2.Blatt
Übungen 02.11.04
Abgaben bis 09.11.04

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Seien $X_i, i = 1, 2, 3 \ldots$, unabhängige, identisch verteilte Größen mit $P(X_i = 1) = 1/2 + \alpha$ und $P(X_i = -1) = 1/2 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1/2)$. Sei $\mathcal{A}_n$ die von $X_1, \ldots, X_n$ erzeugte σ-Algebra und $S_n := X_1 + \ldots + X_n, n = 1, 2, \ldots$. Man zeige für $k = 1, \ldots, n$:

$$E\left[S_n \mid \mathcal{A}_k\right] = S_k + 2\alpha(n-k).$$

2.Aufgabe: T_0 und T_1 seien unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, beide exponentialverteilt mit Parameter α. Für $X = T_0 \wedge T_1 := \min(T_0, T_1)$ ist dann

$$E\left[X \mid T_0\right] = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T_0}\right).$$

a) Berechne die beste *lineare* Schätzung $\widehat{X}$ von X bezüglich T_0.

b) Vergleiche die mittleren quadratischen Schätzfehler für $\widehat{X}$ und $E\left[X \mid T_0\right]$.

3.Aufgabe: Für eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und eine σ-Algebra $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ definieren wir die bedingte Varianz von X bezüglich $\mathcal{A}_0$ als

$$\operatorname{var}\left(X \mid \mathcal{A}_0\right) := E\left[\left(X - E\left[X \mid \mathcal{A}_0\right]\right)^2 \,\middle|\, \mathcal{A}_0\right].$$

a) Zeige:

$$\operatorname{var}\left(X \mid \mathcal{A}_0\right) = E\left[X^2 \mid \mathcal{A}_0\right] - \left(E\left[X \mid \mathcal{A}_0\right]\right)^2$$

und

$$\operatorname{var}(X) = E\left[\operatorname{var}\left(X \mid \mathcal{A}_0\right)\right] + \operatorname{var}\left(E\left[X \mid \mathcal{A}_0\right]\right).$$

b) X_1,X_2,... seien unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit demselben Erwartungswert m und derselben Varianz σ^2. T sei eine von X_1,X_2,... unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und endlichem Erwartungswert. Sei $S_T := X_1 + X_2 + \ldots + X_T$. Zeige

$$E[S_T] = m \cdot E[T] \;\text{ und } \operatorname{var}(S_T) = \sigma^2 \cdot E[T] + m^2 \cdot \operatorname{var}(T).$$

Jede Aufgabe 8 Punkte