Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

13. und letztes Blatt
Übungen 01.02.05
Abgaben bis 08.02.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Man zeige die folgenden Aussagen:

a) Ein typischer Brownscher Pfad ist auf keinem Intervall $[a, b]$, $0 \leq a < b$, monoton.

b) Die lokalen Maxima eines typischen Brownschen Pfades liegen dicht in $[0, 1]$.

2.Aufgabe: Konstruktion des *Stieltjes-Integrals*:

a) Sei $F : [0, T] \to \mathbb{R}$ eine wachsende, rechtsstetige Funktion, somit gibt es ein positives endliches Maß μ auf $[0, T[$, so dass $F(t) = \mu([0, t[)$ (vgl. WT I, Korollar II.4.3). Sei $\zeta_1 \subset \zeta_2 \subset \cdots$ eine aufsteigende Folge von Zerlegungen mit $|\zeta_n| \to 0$. Man definiere das Stieltjes-Integral bezüglich F durch

$$\int\limits_{[0,t[} f(x)\, dF(x) := \int\limits_{[0,t[} f\, d\mu\,, \quad t \in [0, T]$$

und zeige, dass für stetiges F die Riemannsummen bezüglich der Zerlegung (ζ_n) unabhängig von der Wahl der Stützstellen dagegen konvergieren.

b) Sei G eine rechtsstetige Funktion von beschränkter Totalvariation $V_{[0,T]}$ auf $[0, T]$. Man zeige, dass sich G als $G = G_1 - G_2$ schreiben lässt, wobei G_1 und G_2 zwei monoton wachsende Funktionen sind, und definiere das Stieltjes-Integral bezüglich G durch

$$\int\limits_{[0,t[} f(x)\, dG(x) = \int\limits_{[0,t[} f(x)\, dG_1(x) - \int\limits_{[0,t[} f(x)\, dG_2(x)\,, \quad t \in [0, T].$$

Hinweis: Man wähle $G_1(t) = V_{[0,t]}$.

c) Sei nun G noch zusätzlich aus C^1. Man zeige, dass für $t \in [0, T]$

$$\int_0^t f(x)\, dG(x) = \int_0^t f(x) G'(x)\, dx.$$

3.Aufgabe: Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass das Wienermaß auf $C[0, \infty)$ unter der Skalierungstransformation T_c mit $T_c\,\omega(t) = c\,\omega(t/c^2)$, $c > 1$ ergodisch ist.

a) Man zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} E\left[F \circ T_c^n G\right] = E[F]E[G]$$

für $F := f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})$ und $G := g_1(X_{s_1}) \cdots g_k(X_{s_k})$, f_i, g_i stetig, beschränkt.

b) Man schließe daraus, dass

$$E[F|\mathcal{J}] = E[F] \qquad P\text{-fast sicher}$$

für alle F wie oben.

c) Man schließe nun mit einem monotonen Klassenargument auf die Ergodizität des Wienermaßes unter T.

Jede Aufgabe 8 Punkte