Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

12.Blatt
Übungen 25.01.05
Abgaben bis 01.02.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable, man zeige, dass für alle $x \in [0, \infty[$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{1+x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \le P[X > x] \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

gilt.

2.Aufgabe: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Maßraum; man zeige, dass ein Maßraum $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$, genannt die *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, existiert, so dass

a) $\bar{\mathcal{A}}$ die Menge aller A ist, die sich als $A = B \cup C$ mit $B \in \mathcal{A}$ und $C \subset N \in \mathcal{A}$ mit $P(N) = 0$ schreiben läßt und

b) $\bar{P}$ und P auf $\mathcal{A}$ übereinstimmen.

3.Aufgabe: Sei X eine kanonische Brownsche Bewegung auf dem Wienerraum $(C[0,1], \mathcal{F}, P)$.

a) Man zeige, dass die Abbildung $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ messbar ist bezglich $\mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{F}$.

b) Man zeige, dass die Zufallsvariable

$$\int_0^1 X_s(\omega) ds$$

$\mathcal{N}(0, 1/3)$-verteilt ist.

c) Man zeige, dass für P fast alle ω die Menge

$$N(\omega) := \{t \in [0,1] : X_t(\omega) = 0\}$$

eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Bemerkung: In Wahrscheinlichkeitstheorie III werden wir sehen, dass $N(\omega)$ für P fast alle ω eine "fraktale" Menge mit der gebrochenen (*Hausdorff*-)Dimension 1/2 ist. Insbesondere besitzt $N(\omega)$ für P fast alle ω überabzählbar viele Elemente.

Jede Aufgabe 8 Punkte