Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

11.Blatt
Übungen 18.01.05
Abgaben bis 25.01.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe:

a) Man berechne die Laplce-Transformierte $E[e^{-\lambda X}]$ einer eindimensionalen, $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$-normalverteilten Zufallsvariablen X.

b) Man zeige, dass Zufallsvariable $X_1, \dots, X_n$ genau dann voneinander unabhängig sind, falls

$$E\left[e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k X_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\lambda_k X_k}\right]$$

für alle $\lambda_k \in \mathbb{R}$ gilt.

c) Man berechne die charakteristische Funktion

(i) $E[e^{i\lambda Y}]$ einer eindimensionalen, exponentialverteilten Zufallsvariablen Y.

(ii) $E[e^{i\langle\lambda,\bar{Y}\rangle}]$ einer d-dimensionalen, $\mathcal{N}(\bar{m}, C)$-normalverteilten Zufallsvariablen $\bar{Y}$.

2.Aufgabe: Sei

$$\Omega = \mathbb{R}^{[0,1]}, \qquad X_t(\omega) = \omega(t), \qquad \mathcal{F} = \sigma(X_t : 0 \leq t \leq 1)$$

und sei $F : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-messbar. Dann gibt es $t_1, t_2, \ldots \in [0,1]$ und eine messbare Funktion $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ mit

$$F = g(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots).$$

Hinweis: Man benutze Satz IV.5.1 über monotone Klassen.

3.Aufgabe: Die Verteilung μ einer Zufallsvariable X heißt faltungsinvertierbar, falls für zwei von X unabhängige Zufallsvariablen Y, Z mit Verteilungen ν und ρ aus der Gleichheit der Verteilungen von $X+Y$ und $X+Z$ die Gleichheit der Verteilungen von Y und Z folgt. (Das heißt, dass die Faltung $\nu \mapsto \mu * \nu$, eine injektive Abbildung ist.)

a) Man zeige, dass die Verteilung μ von X faltungsinvertierbar ist, falls die charakteristische Funktion von X nur isolierte Nullstellen besitzt.

b) X besitze eine faltungsinvertierbare Verteilung μ und habe dieselbe Verteilung wie die Summe zweier von einander unabhängiger, P-fast sicher nicht konstanter Zufallsvariablen A und B. Man zeige, dass es keine von X unabhängigen Zufallsvariable C geben kann, so dass A dieselbe Verteilung besitzt wie die Summe von X und C.

Jede Aufgabe 8 Punkte