Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

10.Blatt
Übungen 11.01.05
Abgaben bis 18.01.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: *Satz von Ionescu-Tulcea für inhomogene Markov-Ketten*: Ziel ist die Konstruktion einer *zeitlich inhomogenen Markov-Kette*, also eines stochastischen Prozesses X_k, der zum Zeitpunkt k Werte in einem Zustandsraum $(S_k, \mathcal{S}_k)$ annimmt und dessen Übergang von $X_{k-1}(\omega)$ zu $X_k(\omega)$ durch einen stochastischen Kern Π_k von $(S_{k-1}, \mathcal{S}_{k-1})$ nach $(S_k, \mathcal{S}_k)$ gegeben ist. Gesucht ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_μ, so dass

$$E_\mu\left[f(X_0, \ldots, X_n)\right] = \int \mu(dx_0) \int \Pi_1(x_0, dx_1) \ldots \int \Pi_n(x_{n-1}, dx_n) f(x_0, \ldots, x_n)$$

für alle $\mathcal{S}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{S}_n$-messbaren Funktionen $f : S_0 \times \ldots \times S_n \to [0, \infty[$ und eine gegebene Startverteilung μ auf $(S_0, \mathcal{S}_0)$.
Hinweis: Man benutze den Satz von Ionescu-Tulcea, um den Raum-Zeit-Prozess (X_k, k) als *homogene* Markov-Kette auf einem geeignetem Zustandsraum zu konstruieren. Man beachte alle auftretenden Messbarkeitsprobleme.

2.Aufgabe: *Allgemeine Version des Satzes von Ionescu-Tulcea*: Ziel ist die Konstruktion eines *allgemeinen* (also nicht mehr unbedingt Markovschen) stochastischen Prozesses (X_k), der im Zeitpunkt k Werte in einem Zustandsraum $(S_k, \mathcal{S}_k)$ annimmt. Zur genaueren Beschreibung sei

$$S^k := S_0 \times \ldots \times S_k\,, \qquad \mathcal{S}^k := \mathcal{S}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{S}_k,$$

μ eine Startverteilung auf $(S^0, \mathcal{S}^0) = (S_0, \mathcal{S}_0)$ und das stochastische Bewegungsgesetz gegeben durch Kerne K_k von $(S^{k-1}, \mathcal{S}^{k-1})$ nach $(S_k, \mathcal{S}_k)$. Gesucht ist dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_μ, so dass

$$E_\mu\left[f(X_0, \ldots, X_n)\right] = \int \mu(dx_0) \int K_1(x_0, dx_1) \ldots \int K_n(x_0, \ldots, x_{n-1}, dx_n) f(x_0, \ldots, x_n)$$

für alle $\mathcal{S}^n$-messbaren Funktionen $f : S^n \to [0, \infty[$.
Hinweis: Man modelliere $\bar{X}_k := (X_0, \ldots, X_k)$ als zeitlich inhomogene Markov-Kette mit Zustandsraum $(S^k, \mathcal{S}^k)$ und verwende die in Aufgabe 1 gezeigte Existenzaussage für inhomogene Markov-Ketten. Man beachte wiederum alle auftretenden Messbarkeitsprobleme.

3.Aufgabe: Für jedes n sei $(S_n, \mathcal{S}_n)$ ein messbarer Raum,

$$\begin{aligned} S^n &:= S_0 \times \ldots \times S_n\,, \qquad \mathcal{S}^n := \mathcal{S}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{S}_n \\ \Omega &:= \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1 \times \ldots\,, \qquad X_n(\omega) := \omega(n)\,, \qquad \mathcal{A} := \sigma(X_0, X_1, \ldots) \end{aligned}$$

Wir definieren die Projektoren

$$\begin{aligned} \pi_n : \Omega &\to S^n \\ (x_0, x_1, \ldots) &\mapsto (x_0, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \varphi_n := S^{n+1} &\to S^n \\ (x_0, \ldots, x_{n+1}) &\mapsto (x_0, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

a) Sei P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $P^n := P \circ \pi_n^{-1}$. Dann ist die Familie (P_n) *konsistent* im folgenden Sinne:

$$P^{n+1} \circ \varphi_n^{-1} = P^n \text{ für alle } n.$$

b) *Konsistenzsatz von Kolmogorov*: Für jedes n sei P^n eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(S^n, \mathcal{S}^n)$ und die Familie (P^n) sei konsistent (vgl. Teil a)). Außerdem sei jedes S_n polnisch mit $\mathcal{S}_n := \mathcal{B}(S_n)$. Dann gibt es genau eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $P^n = P \circ \pi_n^{-1}$.

Hinweis: S^n ist wieder polnisch bezueglich der Produkttopologie und es gilt $\mathcal{S}^n = \mathcal{B}(S^n)$. Man wende Korrolar IV.1.6 an, um die Aussage auf die allgemeine Aussage des Satzes von Ionescu-Tulcea (Aufgabe 2) zurückzuführen.