Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

1.Blatt
Übungen 26.10.04
Abgaben bis 02.11.04

Übungen

Aufgabe: Bezeichne $\mathcal{M}_1(S, \mathcal{S})$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einem gegeben Raum $(S, \mathcal{S})$. Wir wählen $\Omega := \mathcal{M}_1(S, \mathcal{S})$ und definieren eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω als die von der Abbildung $\mu \mapsto \mu(A)$, $A \in \mathcal{S}$, erzeugte. Sei P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$, man zeige:

a) Durch
$$\mu_P[A] := \int \nu[A] P[d\nu], \quad A \in \mathcal{S},$$
ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(S, \mathcal{S})$ definiert, das *Intensitätsmaß* von P.

b) Ist Q eine weitere Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $Q \ll P$, so gilt $\mu_Q \ll \mu_P$.

Hausaufgaben

1.Aufgabe: P und Q seien zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Man zeige (ohne Verwendung des Satzes von Radon-Nikodym), dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $P \ll Q$.

ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $Q[A] < \delta$ für ein $A \in \mathcal{A}$ folgt $P[A] < \varepsilon$.

2.Aufgabe: Seien $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $X_i(\omega) := x_i$ für $\omega = (x_1, x_2, \dots) \in \Omega$ und $\mathcal{A} = \sigma(X_1, X_2, \dots)$. Weiterhin seien P und Q diejenigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\Omega, \mathcal{A})$, unter denen die (X_i) unabhängig und identisch verteilt (also iid) sind, und zwar mit $P[X_i = 1] = p$ und $Q[X_i = 1] = q$, $p, q \in (0,1)$.

a) Sei $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ die von $X_1, \dots, X_n$ erzugte σ-Algebra. Man zeige, dass die Radon-Nikodym-Dichte von Q bzgl. P auf $\mathcal{A}_n$ gegeben ist durch

$$\varphi_n(\omega) = \frac{Q[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]}{P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]}$$

für $\omega = (x_1, x_2, \dots) \in \Omega$. Insbesondere gilt $Q \approx P$ auf $\mathcal{A}_n$.

b) Mit Kolmogorovs Gesetz der Grossen Zahlen untersuche man die P- bzw. Q-fast sichere Asymptotik von

$$\frac{1}{n} \log \varphi_n.$$

c) Aus b) folgere man, dass ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $P[A] = 1$ und $Q[A] = 0$. Insbesondere gilt also weder $P \ll Q$ noch $Q \ll P$ auf ganz $\mathcal{A}$.

3.Aufgabe: Man zeige, dass für Wahrscheinlichkeitsverteilungen μ, ν, η auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu \ll \nu \ll \eta$

$$\frac{d\mu}{d\eta} = \frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\eta}$$

und folgere daraus, dass für $\mu \approx \nu$ (d.h. $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$)

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1}$$

gilt.

Jede Aufgabe 8 Punkte