Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

9.Blatt
Übungen 10.06.05
Abgaben bis 17.06.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Man zeige,

(i) dass aus Konvergenz in Verteilung gegen eine Konstante ($X_n \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R}$) Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ($X_n \xrightarrow{P} c$) folgt,

(ii) dass aber im Allgemeinen aus Konvergenz in Verteilung nicht Konvergenz in Wahrscheinlichkeit folgt,

(iii) dass aus Konvergenz $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit die Existenz einer Teilfolge X_{n_k} folgt, die fast sicher gegen X konvergiert.

2.Aufgabe: Sei X_n eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $X_n \xrightarrow{P} X$. Man zeige, dass X fast sicher konstant ist.

3.Aufgabe: Man beweise mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes, dass

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

4.Aufgabe: In einer Meeresfarm werden Muscheln zur Perlengewinnung gezüchtet, allerdings bringt durchschnittlich nur jede fünfzigste Muschel eine Perle hervor.

(i) Wie viele Muscheln müssen mindestens geöffnet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% oder mehr mindestens eine Perle zu erhalten?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter 100 Muscheln keine Perle zu finden?

(iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 100 Muscheln mindestens zwei Perlen enthalten?

Man berechne die Ergebnisse zunächst exakt und vergleiche sie dann mit denen, die sich bei der Verwendung des Poissonschen und des Zentralen Grenzwertsatzes ergeben.

Jede Aufgabe 6 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: Wir definieren $\rho(X,Y) = E[|X-Y| \wedge 1]$, man zeige, dass ρ eine Metrik auf den Äquivalenzklassen $X \sim Y :\Leftrightarrow P[X=Y]=1$ definiert und die Konvergenzen $\rho(X_n, X) \to 0$ und $X_n \xrightarrow{P} X$ äquivalent sind.

Aufgabe 2: *Box-Muller Methode zur Simulation normalverteilter Zufallsgrößen*: Seien U, V unabhängige, auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsgrößen und

$$X := \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V), \qquad Y := \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V)$$

Man zeige, dass X und Y unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsgrößen sind.

Aufgabe 3: Hotel Bernoulli hat 200 Betten. Wie viele Reservierugen darf die Hotelleitung entgegennehmen, ohne den guten Ruf des Hotels zu verlieren, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% storniert wird? Dabei kann es sich das Hotel leisten, in 25 von 1000 Fällen in die Verlegenheit zu kommen, dass trotz Reservierung kein Bett mehr frei ist, ohne seinen guten Ruf zu verlieren.