Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

8.Blatt
Übungen 03.06.05
Abgaben bis 10.06.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Man zeige, dass aus den Konvergenzen $X_n \to X$ und $Y_n \to Y$

(i) fast sicher (ii) in Wahrscheinlichkeit,

die Konvergenz $aX_n + bY_n \to aX + bY$ im jeweiligen Sinne folgt.

2.Aufgabe: *Monte-Carlo Integration*: Will man das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ numerisch berechnen, verwendet man oft die Methode der Monte-Carlo Integration: man wählt eine Folge X_n von unabhängigen, auf $[0,1]$ gleichverteilten, reellen (Pseudo-)Zufallsgrößen und berechnet $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$. Man zeige, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)dx \qquad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

Frage: Gilt diese Konvergenz auch fast sicher?

3.Aufgabe: Seien E_i unabhängige, identisch exponentialverteilte Zufallsgrößen mit Parameter $\lambda = 1$. Man zeige, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n}{\log n} = 1 \qquad \text{fast sicher.}$$

4.Aufgabe: Man zeige, dass

(i) $E[|X|] = 0$ und $P[|X| = 0] = 1$ äquivalente Aussagen sind,

(ii) aus der Konvergenz im p-ten Mittel die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit folgt,

(iii) aus der Konvergenz $X_n \to X$ in $\mathcal{L}^1$ die Konvergenz $E[X_n] \to E[X]$ folgt, die Umkehrung jedoch nicht gilt.

(iv) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und X_n eine Folge von reellen Zufallsgrößen, die in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergiert. Man zeige, dass die Konvergenz $f(X_n) \to f(X)$ in Wahrscheinlichkeit gilt.

Jede Aufgabe 6 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: Wir betrachten das Modell für die Populationsdynamik von Blatt 7, Tutoriumsbeispiel 3 und Hausübung 2, mit $p_0 = p_2 = 1/2$. Man zeige, dass die erwartete Populationsgröße in jeder Generation 1 ist, die Population aber dennoch mit Wahrscheinlichkeit 1 ausstirbt.

Aufgabe 2: *Bernstein-Polynome*: Ein stochastischer Beweis des Weierstraß'schen Approximationssatzes: Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ lässt sich gleichmäßig durch die sogenannten Bernstein-Poynome

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

approximieren. Genauer: Sei X_n eine Folge unabhängiger Bernoulli-Variablen mit Erfolgsparameter p, so gilt

$$E\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right] \to f(p) \qquad \text{gleichmäßig in } p.$$

Aufgabe 3: Seien E_i unabhängige, identisch exponentialverteilte Zufallsgrößen mit Parameter $\lambda = 1$. Man zeige, dass

$$-1 \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{\max_{n\leq N} E_n - \log N}{\log\log N} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\max_{n\leq N} E_n - \log N}{\log\log N} \leq 1 \qquad \text{fast sicher.}$$

Aufgabe 4: Man zeige, dass aus den Konvergenzen $c_n \xrightarrow{n\to\infty} c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ und $X_n \to X$

(i) fast sicher (ii) in Wahrscheinlichkeit,

die Konvergenz $c_n X_n \to cX$ im jeweiligen Sinne folgt.