Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

7.Blatt
Übungen 27.05.05
Abgaben bis 04.06.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Sei X eine diskrete Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}_0$, G_X ihre erzeugende Funktion, $Y := aX + b$ (a, $b \in \mathbb{N}_0$) und Z exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Man berechne

(i) die erzeugende Funktion von Y.

(ii) die charakteristische Funktion von Z.

2.Aufgabe: Wir befinden uns im Setting von Tutoriumsaufgabe 3.

(i) Man berechne $E[N_n]$, also die erwartete Größe der n-ten Generation.

(ii) Man zeige, dass die Population ausstirbt, falls die erwartete Anzahl der Nachkommen eines Individuums kleiner als eins ist, d.h.
$$\lim_{n\to\infty} P[N_n = 0] = 1.$$

3.Aufgabe: Sei X_k eine Folge von identisch verteilten Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und N ebenfalls eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgröße, so dass $N, X_1, X_2, \ldots$ in ihrer Gesamtheit unabhängig sind und $E[X_i] < \infty$, $E[N] < \infty$. Man zeige, dass
$$E\left[\sum_{k=1}^{N} X_k\right] = E[N]E[X_1] < \infty.$$

4.Aufgabe: Sei X eine reelle Zufallsgröße mit stetiger Dichte f und Y, Z unabhängige, identisch verteilte reelle Zufallsgrößen mit charakteristischer Funktion φ.

(i) Man zeige, dass, falls f eine gerade Funktion ist, die charakteristische Funktion von X reellwertig ist.

(ii) Man berechne die charakteristische Funktion von $Y - Z$.

Jede Aufgabe 6 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: Sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\mu > 0$ und Y Poisson-verteilt mit Parameter X. Man berechne

(i) die erzeugende Funktion von Y.

(ii) die charakteristische Funktion von X.

Aufgabe 2: Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, geometrisch verteilte Zufallsgrößen mit Parameter p und $Z := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Man zeige mit Hilfe von erzeugenden Funktionen, dass Z negativ binomialverteilt ist.

Aufgabe 3: *Populationsdynamik und Verzweigungsprozesse*: Wir betrachten das folgende Modell einer Populationsentwicklung: Die erste Generation bestehe aus einem Individuum, das mit Wahrscheinlichkeit p_k genau k ($k \in \mathbb{N}_0$) Nachkommen habe (diese Verteilung möge einen endlichen Erwartungswert besitzen). Diese Nachkommen vermehren sich unabhängig von einander und unabhängig von der gegenwärtigen Größe der Population mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, usw. usf. Sei N_n die Anzahl der Individuen in der n-ten Generation, man berechne die erzeugende Funktion von N_n.