Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

# Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

*6.Blatt*
Übungen 20.05.05
Abgaben bis 27.05.05

## Hausaufgaben

**1.Aufgabe**: $N$ Personen werden einem Bluttest unterzogen. Die Personen seien unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ infiziert. Der Test wird wie folgt durchgeführt: die $N = n \cdot k$ Proben werden in $n$ Gruppen der Größe $k$ aufgeteilt. In jeder Gruppe wird zunächst das Blut aller Proben zusammengeschüttet und gemeinsam getestet. Ist der Befund in einer Gruppe positiv, so werden alle Proben dieser Gruppe nochmals einzeln getestet. $X_{n,k}$ sei die Gesamtzahl der benötigten Tests, man berechne $E[X_{n,k}]$.

**2.Aufgabe**: Seien $X$ und $Y$ zwei unabhängige, standard-normalverteilte Zufallsgrößen. Man berechne die Verteilung von $\sqrt{X^2+Y^2}$. Um welche Verteilung handelt es sich hierbei?

**3.Aufgabe**: Seien $X$ und $Y$ unabhängige Zufallsgrößen mit $P[X=1] = P[X=-1] = P[Y=1] = P[Y=-1] = 1/2$. Man zeige, dass die Zufallsgrößen $X+Y$ und $|X-Y|$ unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

**4.Aufgabe**: Seien $X$, $Y$ und $Z$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsgrößen.Mit welcher Wahrscheinlichkeit lässt sich ein Dreieck mit den Seitenlängen $X$, $Y$ und $Z$ bilden?

Jede Aufgabe 6 Punkte

## Tutoriumsvorschläge

**Aufgabe 1**: Seien $E_k$ unabhängige, identisch exponentialverteilte Zufallsgrößen mit Parameter $\lambda > 0$. Man berechne die Grenzverteilung von $\max_{1 \le n \le N} E_n - \lambda^{-1} \log N$ für $N \to \infty$, d.h.

$$F(x) := \lim_{N \to \infty} P\left[\max_{1 \le n \le N} E_n - \frac{1}{\lambda} \log N \le c\right], \qquad c \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 2**: Seien $X$, $Y$ reelle Zufallsgrößen und $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbare Funktionen. Man zeige

(i) Sind $X$ und $Y$ unabhängig, so sind auch $f(X)$ und $g(Y)$ unabhängig.

(ii) Sind $X$ und $Y$ unkorelliert und $E[|f(X)|^2] < \infty$ und $E[|g(Y)|^2] < \infty$, so sind $f(X)$ und $g(Y)$ nicht notwendigerweise unkorelliert.

**Aufgabe 3**: Sei $Y$ eine Cauchy-verteile Zufallsgröße, das heißt, dass ihre Dichte durch

$$f_Y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

gegeben ist. Man zeige, dass die Cauchy-Verteilung keinen Erwartungswert (und auch keine höheren Momente) besitzt.