Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

4.Blatt
Übungen 06.05.05
Abgaben bis 13.05.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: *Banachs Streichholzproblem*: Der bekannte polnische Funktionalanalytiker Stefan Banach hatte in jeder seiner beiden Manteltaschen stets jeweils eine Schachtel Streichhölzer. Er bediente sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit links oder rechts. Wenn er zum ersten mal eine Schachtel leer vorfand, ersetzte er beide Schachteln durch volle. Man berechne die Verteilung der übrig gebliebenen Streichhölzer nach einem Durchgang (d.h. nach dem erstmaligen Vorfinden einer leeren Schachtel), wobei sich in jeder vollen Schachtel N Streichhölzer befinden.

2.Aufgabe: In einer Wohngemeinschaft wohnen 30 Personen. Jeden Tag wird zufällig eine ausgewählt, die das Geschirr spülen muss. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, sechs mal oder öfter im Jahr ausgewählt zu werden

(i) exakt,

(ii) näherungsweise mit Hilfe des Poissonschen Grenzwertsatzes.

3.Aufgabe: Man zeige, dass eine Zufallvariable X mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und $P[X \geq n] > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ genau dann gedächtnislos ist, wenn sie geometrisch verteilt ist.

4.Aufgabe: Sei $\lambda \in (0, 1)$ und (X_n) eine Folge von geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit Parametern $p_n = \lambda \cdot n^{-1}$. Man zeige, dass die Folge der Verteilungsfunktionen $F_{\frac{1}{n}X_n}$ der Zufallsvariablen $\frac{1}{n}X_n$ punktweise gegen die Verteilungsfunktion F einer reellwertigen Zufallsvariable X konvergiert. Um welche Verteilung handelt es sich?

Jede Aufgabe 6 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: Sei $p \in (0,1)$ und (X_n) unabhängige, identisch verteilte Bernoulli-Variablen, d.h. $P[X_n = 1] = 1 - P[X_n = 0] = p$. Sei Y_1 die Anzahl der Misserfolge vor dem ersten Erfolg und Y_2 die Anzahl der Misserfolge zwischen dem ersten und dem zweiten Erfolg. Man zeige, dass Y_1 und Y_2 unabhängig sind.

Aufgabe 2: Die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ ist durch die Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} .$$

definiert.

(i) Man berechne die Dichte f_X von X.

(ii) In Analogie zu Hausübung 3, Blatt 3 stelle man die Verteilungsfunktion F_X der Exponentialverteilung durch die Verteilungsfunktion F_U der Gleichverteilung auf $(0,1)$ dar.

(iii) Man zeige, dass eine Zufallvariable X mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $P[X \geq x] > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ genau dann gedächtnislos ist, wenn sie exponentialverteilt ist.