Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

3.Blatt
Übungen 29.04.05
Abgaben bis 06.05.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: In einer Familie mit $n \geq 2$ Kindern sei die Wahrscheinlichkeit für das Geschlecht eines Kindes gleichverteit. Sind die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &:= \text{“Kinder beiderlei Geschlechts sind in der Familie vertreten”} \\ B &:= \text{“Es gibt höchstens ein Mädchen”} \end{aligned}$$

unabhängig?

2.Aufgabe: *Würfelparadox*: Zwei Würfel W_1 und W_2 seien wie folgt beschriftet:

$$W_1 : 6\,3\,3\,3\,3\,3 \qquad W_2 : 5\,5\,5\,2\,2\,2$$

Anton und Brigitte würfeln mit W_1 beziehungsweise W_2. Wer die höhere Augenzahl erzielt, hat gewonnen.

(i) Man zeige, dass Anton die besseren Gewinnchancen hat.

(ii) Brigitte bemerkt dies und schlägt Anton vor : “Ich beschrifte jetzt einen dritten Würfel. Du darfst dir dann einen beliebigen Würfel aussuchen, ich wähle mir einen der beiden anderen”. Kann Brigitte den dritten Würfel so beschriften, dass sie in jedem Fall die besseren Gewinnchancen hat? Wenn ja, dann gebe man eine solche Beschriftung an und beweise, dass nun Brigitte die besseren Gewinnchancen hat. Wenn dies nicht der Fall ist, so beweise man dies ebenfalls.

3.Aufgabe: Sei Y eine auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsgröße und $\varphi(y) := \min\{x : F(x) \geq y\}$ für eine Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$. Man zeige, dass $X := \varphi(Y)$ eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion F ist.

4.Aufgabe: Sei X eine reelle Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion F_X und a, $b \in \mathbb{R}$. Man drücke die Verteilungsfunktionen der Zufallsgrößen

(i) $Y_1 := aX + b$

(ii) $Y_2 := |X|$

(iii) $Y_3 := e^X$

durch F_X aus.

Jede Aufgabe 6 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: In der Zahlentheorie bezeichnet man als *Eulersche φ-Funktion* die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(n) =$ "Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$" für $n \geq 2$. Man zeige, dass für $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ (die Primfaktorzerlegung von n in paarweise verschiedene $p_1, \dots, p_m$ mit Potenzen $k_i \in \mathbb{N}$)

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

gilt.

Aufgabe 2: Sei X eine reelle Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - p & -1 \leq x < 0 \\ 1 - p + \frac{1}{2}xp & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Man zeichne den Graph von F_X und bestimme

(i) $P[X = -1]$,

(ii) $P[X = 0]$,

(iii) $P[X \geq 1]$.

Aufgabe 3: Sei X eine reelle Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion F_X und Dichte f_X.

(i) Man drücke die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $Y_1 := \sin X$ durch F_X aus.

(ii) Man drücke Verteilungsfunktion und Dichte der Zufallsgröße $Y_2 := \sqrt{X}$ durch F_X und f_X aus, falls $X \geq 0$.

Aufgabe 4: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ unabhängig. Man zeige, dass dann auch $A_1^{i_1}, \dots, A_n^{i_n}$ für $i_1 \dots, i_n \in \{0, c\}$ unabhängig sind, wobei $A_i^0 := A_i$ und A_i^c das Komplement der Menge A_i bezeichnet.