Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

2.Blatt
Übungen 22.04.05
Abgaben bis 29.04.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Es seien 5 Münzen gegeben, zwei mit "Kopf" auf beiden Seiten, eine mit "Zahl" auf beiden Seiten und zwei gewöhnliche, eine mit "Kopf" auf der einen und "Zahl" auf der anderen Seite. Eine der 5 Münzen wird zufällig ausgewählt und geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) die Unterseite "Kopf" zeigt, wenn man auch die Oberseite nicht sieht?

(ii) auch die Unterseite "Kopf" zeigt, wenn die Oberseite "Kopf" zeigt?

Die Oberseite zeigt "Kopf", die Münze wird nochmals geworfen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(iii) die Unterseite jetzt "Kopf" zeigt, wenn man auch die Oberseite nicht sieht?

(iv) auch die Unterseite "Kopf" zeigt, wenn die Oberseite jetzt "Kopf" zeigt?

Die Oberseite zeigt "Kopf", eine der restlichen vier Münzen wird ausgewählt und geworfen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(v) ihre Oberseite Kopf zeigt?

2.Aufgabe: Die Assistentin kennt die Arbeitsgruppe der Studentinnen Anette, Berta und Cornelia schon seit längerem und weiß, dass Anette 80%, Berta 15% und Cornelia nur 5% der Aufgaben bearbeitet und sie es so einteilen, dass keine Aufgabe doppelt bearbeitet wird. Auf Grund ihrer unterschiedlichen Erfahrung können sie eine Aufgabe mit 90%, 50% und 15% Wahrscheinlichkeit richtig lösen.

(i) Die Assistentin hat von der Arbeitsgruppe eine fehlerhafte Lösung bekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie von Anette, Berta beziehungsweise Cornelia?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Lösung richtig?

3.Aufgabe: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B, $C \in \mathcal{F}$. Man zeige, dass aus der Unabhängigkeit von A, B und C auch die Unabhängigkeit von $A \cup B$ und C folgt.

Jede Aufgabe 8 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: Die Freundinnen Julia und Petra haben sich ausgemacht, sich im Mathe-Café zwischen 12 und 13 Uhr zu treffen. Die erste, die kommt, wartet zwanzig Minuten auf die andere und geht dann wieder, sollte die andere nicht kommen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Petra und Julia treffen, unter der Annahme, dass sie unabhängig von einander zu zufälligen Zeitpunkten zwischen 12 und 13 Uhr eintreffen.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer abzählbaren Menge Ω (mit der Potenzmenge von Ω als σ-Algebra).

(i) Man zeige, dass $\mathcal{P}$ konvex ist.

(ii) Man beschreibe die Extremalpunkte von $\mathcal{P}$ und zeige, dass sich jedes $P \in \mathcal{P}$ als "Mischung" von Extremalpunkten darstellen lässt, d.h.

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_i$$

mit $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, P_i extremal.

Dabei ist $Q \in \mathcal{P}$ Extremalpunkt, falls aus $\alpha Q_1 + (1-\alpha)Q_2 = Q$ für $\alpha \in (0,1)$, $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}$ folgt, dass $Q = Q_1 = Q_2$.

Aufgabe 3: Eine Berliner Finanzmathematikerin flog im Sommer 2004 via London und New York zur Bachelier-Konferenz, dem weltweit wichtigsten Finanzmathematik-Kongress, nach Chicago. Ihr Koffer ging verloren, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Koffer in (i) Berlin, (ii) London und (iii) New York liegen geblieben ist, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der Koffer nicht weiter geleitet wurde, in Berlin-Schönefeld, London-Heathrow und New York-JFK jeweils p ist.

Aufgabe 4: In einer Urne befinden sich 6 rote und 2 schwarze Kugeln, in einer zweiten Urne 3 rote und 7 schwarze Kugeln. Nun wird mit einem (fairen) Würfel gewürfelt. Ist die Augenzahl 1 oder 2, so wird aus der ersten Urne eine Kugel (zufällig) gezogen, bei 3, 4, 5 oder 6 aus der zweiten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Kugel rot?

Aufgabe 5: Man gebe ein Beispiel dafür an, dass aus paarweiser Unabhängigkeit von Ereignisen nicht unbedingt ihre Unabhängigkeit folgt.