Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

13.Blatt
Weitere Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Von zwei identischen Spielkartensätzen à 52 Blatt wird einer gut durchgemischt, danach beide Stapel verdeckt nebeneinader gestellt und immer von jedem der beiden Stapel die oberste Karte augfgedeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zug bei beiden Stapeln dieselbe Karte aufgeschlagen wird?

Aufgabe 2: Sei$X$ eine reele Zufallsgröße mit $E[X^2] < \infty$. man zeige, dass für alle $a \in \mathbb{R}$

$$E\left[(X-a)^2\right] \geq V[X],$$

mit Gleichheit genau dann, falls $a = E[X]$.

Aufgabe 3: In einem Strategiespiel gibt es zwei "Würfel", ein Dodekaeder beschriftet mit den Zahlen $1+3k$, $k \in \{0,\ldots,11\}$ und ein Tetraeder beschriftet mit den Zahlen 2^l, $l \in \{2,\ldots,5\}$, beide werden gleichzeitig geworfen.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide "Würfel" die selbe Zahl anzeigen?

(ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl auf dem Dodekaeder um mindestens 3 größer ist als die Zahl auf dem Tetraeder?

Aufgabe 4: Eine Münze vom Radius r wird auf ein Schachbrett mit Kantenlänge l der 64 quadratischen Felder geworfen. Sei $l > 2r$, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze (unter der Annahme, dass sie zur Gänze auf dem Brett zu liegen kommt) nur Felder einer Farbe berührt?

Aufgabe 5: Eine gezinkte Münze mit Wahrscheinlichkeit p für "Kopf" wird N-mal geworfen. Man konstruiere einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumaum und bereche die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

(i) "Kopf" wird genau so oft geworfen wie "Zahl" (so $N = 2k$ eine gerade Zahl ist).

(ii) genau zwei mal "Kopf" wird geworfen.

(iii) mindestens zwei mal "Kopf" wird geworfen.

Aufgabe 6: Zwei KneipenbesucherInnen K_1 und K_2 einigen sich darauf, eine Münze zu werfen und je nach Ausgang dieses Wurfes muss bei "Wappen" K_1 die Zeche zahlen und bei "Zahl" K_2. Vor dem Wurf vermutet K_1 mit Wahrscheinlichkeit p, dass die Münze gezinkt ist und beidseitig "Wappen" zeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann K_1 nach dem Wurf, der "Wappen" gebracht hat, nun vermuten, dass die Münze gezinkt ist?

Aufgabe 7: In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut, die im Falle eines Einbruchs mit 99% Wahrscheinlichkeit die Polizei alarmiert. In einer Nacht ohne Einbruch wird mit $0,2\%$ Fehlalarm ausgelöst (z.B. durch eine Maus). Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht beträgt $0,005\%$. Die Anlage hat gerade Alarm gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Einbruch im Gange?

Aufgabe 8: Sei X eine reelle Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

und $Y := X^2$. Man bestimme

(i) $P\left[-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right]$,

(ii) $P[Y \leq X]$,

(iii) $P[X = 1]$,

(iv) $P\left[X + Y \leq \frac{3}{4}\right]$.

Aufgabe 9: Sei $G_{X,Y}(s,t) := E[s^X t^Y]$ die gemeinsame erzeugende Funktion von X und Y. Man drücke G_X und G_Y durch $G_{X,Y}$ aus und zeige

$$E[XY] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} G_{X,Y}(s,t)\bigg|_{s=t=1-}$$

Aufgabe 10: Sei X eine reelle Zufallsgröße mit Werten in $[0,\infty[$. Man zeige, dass

$$E[X] = \int_0^\infty P[X \geq s]\, ds.$$

Aufgabe 11: Eine faire Münze wird n mal geworfen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nie zwei mal hintereinander "Kopf" geworfen wird?

Aufgabe 12: Man gebe eine Folge reeler Zufallsgrößen X_i, $E[X_i^2] < \infty$ an, für die weder das (schwache oder starke) Gesetz der großen Zahlen noch der zentrale Gerenzwertsatz gilt.