

Technische Universität Berlin
 Fakultät II - Institut für Mathematik
 Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
 Übung: Stephan Sturm
 Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
 Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

12. Blatt
 Übungen 01.07.05
 Abgaben bis 08.07.05

Hausaufgaben

1. Aufgabe: Sei (X_n) eine homogene Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum I und $f : I \rightarrow J$ eine nicht konstante Abbildung von I auf J .

- (i) Man zeige, dass $Y_n := f(X_n)$ im Allgemeinen keine Markovkette auf J ist.
- (ii) Man gebe eine hinreichende Bedingung an f an, so dass $f(X_n)$ tatsächlich eine Markov-Kette auf J ist.

2. Aufgabe: Sei (X_n) eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix P .

- (i) Man berechne die Matrix \tilde{P} , gegeben durch $\tilde{p}_{ij} := P[X_{n-1} = j | X_n = i]$.
- (ii) Sei nun der Zustandsraum der Markov-Kette \mathbb{Z} . (X_n) heißt zeitumkehrbar, falls (X_n) und (Y_n) , gegeben durch $Y_n := X_{-n}$, dieselbe Verteilung haben. Wie läßt sich diese Eigenschaft durch Übergangsmatrix und Anfangsverteilung charakterisieren?

3. Aufgabe: Wir befinden uns im Setting von Tutoriumsaufgabe 2: Man zeige, dass die hypergeometrische Verteilung eine stationäre Anfangsverteilung der Markov-Kette (X_n) ist.

Jede Aufgabe 8 Punkte

Zusatzaufgabe zum Auffüllen des Punktekontos: Sei (X_n) eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $P[X_n = 1] = 1 - P[X_n = -1] = p$ und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ die dadurch erzeugte Irrfahrt auf \mathbb{Z} . Wir wollen nun die Verteilung des (zufälligen) Zeitpunktes der ersten Rückkehr nach 0 berechnen, sei hierfür

$$\tau_0 := \inf\{n \geq 1 | S_n = 0\}$$

und G die erzeugende Funktion von τ_0 . Weiters definieren wir $p_0(n) := P[S_n = 0]$ und

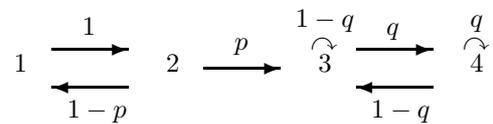
$$P(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n) s^n,$$

in Folge berechne man Verteilung von τ_0 , indem man zeigt, dass

- (i) $P(s) = 1 + P(s)G(s)$,
- (ii) $P(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)s^2}}$,
- (iii) $G(s) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)s^2}$.
- (iv) Nun berechne man den Erwartungswert von τ_0 für $p = \frac{1}{2}$.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: Wir betrachten die folgende homogene Markovkette:



- (i) Abhängig von $p, q \in [0, 1]$ klassifiziere man die Zustände in wesentliche bzw. unwesentliche, äquivalente und periodische bzw. aperiodische.
- (ii) Man berechne die stationären Anfangsverteilungen der Markovkette (in Abhängigkeit von p und q).

Aufgabe 2: Für das Mischen zweier Flüssigkeiten betrachten wir das folgende Modell: Urne A enthalte am Anfang s schwarze, Urne B w weiße Kugeln ($s, w \in \mathbb{N}; s \geq w$). Nun wird in jedem Schritt aus jeder Urne zufällig eine Kugel gezogen und in die jeweils andere Urne gelegt. Für $n \in \mathbb{N}$ beschreibe die Zufallsgröße X_n die Anzahl der weißen Kugeln in Urne A nach dem n -ten Schritt.

- (i) Man bestimme den Zustandsraum I und die Übergangsmatrix P der Markov-Kette (X_n) .
- (ii) Man zeige, dass die Markov-Kette irreduzibel ist.

Aufgabe 3: Seien (X_n) und (Y_n) homogene Markov-Ketten auf \mathbb{Z} , ist (Z_n) , gegeben durch $Z_n := X_n + Y_n$, wieder eine Markov-Kette auf \mathbb{Z} ?