Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

12.Blatt
Übungen 01.07.05
Abgaben bis 08.07.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Sei (X_n) eine homogene Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum I und $f : I \to J$ eine nicht konstante Abbildung von I auf J.

(i) Man zeige, dass $Y_n := f(X_n)$ im Allgemeinen keine Markovkette auf J ist.

(ii) Man gebe eine hinreichende Bedingung an f an, so dass $f(X_n)$ tatsächlich eine Markov-Kette auf J ist.

2.Aufgabe: Sei (X_n) eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix P.

(i) Man berechne die Matrix $\tilde{P}$, gegeben durch $\tilde{p}_{ij} := P[X_{n-1} = j | X_n = i]$.

(ii) Sei nun der Zustandsraum der Markov-Kette $\mathbb{Z}$. (X_n) heißt zeitumkehrbar, falls (X_n) und (Y_n), gegeben durch $Y_n := X_{-n}$, dieselbe Verteilung haben. Wie läßt sich diese Eigenschaft durch Übergangsmatrix und Anfangsverteilung charakterisieren?

3.Aufgabe: Wir befinden uns im Setting von Tutoriumsaufgabe 2: Man zeige, dass die hypergeometrische Verteilung eine stationäre Anfangsverteilung der Markov-Kette (X_n) ist.

Jede Aufgabe 8 Punkte

Zusatzaufgabe zum Auffüllen des Punktekontos: Sei (X_n) eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $P[X_n = 1] = 1 - P[X_n = -1] = p$ und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ die dadurch erzeugte Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Wir wollen nun die Verteilung des (zufäligen) Zeitpunktes der ersten Rückkehr nach 0 berechnen, sei hierfür

$$\tau_0 := \inf\{n \geq 1 | S_n = 0\}$$

und G die erzeugende Funktion von τ_0. Weiters definieren wir $p_0(n) := P[S_n = 0]$ und

$$P(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n) s^n,$$

in Folge berechne man Verteilung von τ_0, indem man zeigt, dass

(i) $P(s) = 1 + P(s)G(s)$,

(ii) $P(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)s^2}}$,

(iii) $G(s) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)s^2}$.

(iv) Nun berechne man den Erwartungswert von τ_0 für $p = \frac{1}{2}$.

10 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: Wir betrachten die folgende homogene Markovkette:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "1"] & 2 \arrow[l, shift left, "1-p"] \arrow[r, "p"] & 3 \arrow[loop above, "1-q"] \arrow[r, shift left, "q"] & 4 \arrow[l, shift left, "1-q"] \arrow[loop above, "q"]
\end{tikzcd}$$

(i) Abhängig von p, $q \in [0, 1]$ klassifiziere man die Zustände in wesentliche bzw. unwesentliche, äquivalente und periodische bzw. aperiodische.

(ii) Man berechne die stationären Anfangsverteilungen der Markovkette (in Abhängigkeit von p und q).

Aufgabe 2: Für das Mischen zweier Flüssigkeiten betrachten wir das folgende Modell: Urne A enthalte am Anfang s schwarze, Urne B w weiße Kugeln (s, $w \in \mathbb{N}$; $s \geq w$). Nun wird in jedem Schritt aus jeder Urne zufällig eine Kugel gezogen und in die jeweils andere Urne gelegt. Für $n \in \mathbb{N}$ beschreibe die Zufallsgröße X_n die Anzahl der weißen Kugeln in Urne A nach dem n-ten Schritt.

(i) Man bestimme den Zustandsraum I und die Übergangsmatrix P der Markov-Kette (X_n).

(ii) Man zeige, dass die Markov-Kette irreduzibel ist.

Aufgabe 3: Seien (X_n) und (Y_n) homogene Markov-Ketten auf $\mathbb{Z}$, ist (Z_n), gegeben durch $Z_n := X_n + Y_n$, wieder eine Markov-Kette auf $\mathbb{Z}$?