Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

11.Blatt
Übungen 24.06.05
Abgaben bis 01.07.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Gegeben ist die Übergangsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einer Markovkette, man berechne $\lim_{n\to\infty} P^n$.

2.Aufgabe: Seien a, $b \in [0,1]$ und (X_n) eine Markov-Kette auf $I = \{0,1\}$ mit Anfangsverteilung p^0 und Übergangsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

(i) Man klassifiziere die Zustände in Abhängigkeit von a und b.

(ii) Man charakterisiere die stationären Anfangsverteilungen in Abhängigkeit von a und b.

3.Aufgabe: *Ruinproplem*: Zwei SpielerInnen, A und B, sind im Besitz von a bzw. b Euro. Sie werfen wiederholt eine faire Münze, je nach Ergebnis gibt der Verlierer dem Sieger einen Euro. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler sein gesamtes Kapital verloren hat. Sei X_n der Gewinn von Spieler A.

(i) Man zeige, dass (X_n) eine Markovkette auf $I = \{-a, \ldots, 0, \ldots, b\}$ ist und berechne die Übergangsmatrix.

(ii) Man klassifiziere die Zustände von (X_n). Was läßt sich noch über diese Markov-Kette sagen?

4.Aufgabe: Wir betrachten den Verzweigungsprozess von Tutoriumsaufgabe 3, Blatt 7.

(i) Man zeige, dass (N_n) (N_n die Größe der n-ten Generation) eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ bildet.

(ii) Man berechne die unendlichdimensionale "Übergangsmatrix", also die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij}, i, $j \in \mathbb{N}_0$.

Jede Aufgabe 6 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:

(i) Sei (X_n) eine Markov-Kette, man zeige, dass die (um m nach links) geshiftete Folge (X_{m+n}) ebenfalls eine Markov-Kette ist.

(ii) Man zeige, dass eine Markov-Kette genau dann stationär ist, falls für allen $n \in \mathbb{N}$

$$(X_0, X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$$

gilt, wobei $Y \stackrel{d}{=} Z$ bedeutet, dass Y und Z dieselbe Verteilung besitzen.

Aufgabe 2: Ein fairer Würfel wird n-mal geworfen; sei X_k die größte Augenzahl der ersten k Würfe $(1 \leq k \leq n)$. Man zeige, dass (X_n) eine Markov-Kette ist, und berechne die Übergangsmatrix P sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$.

Aufgabe 3: Sei (X_n) eine homogene Markov-Kette, so dass die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes für Markov-Ketten erfüllt sind, und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I^2 \to \mathbb{R}$ beschränkte Borel-Funktionen. Man berechne

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} E[g(X_n, X_{n+1})].$$