Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

10.Blatt
Übungen 17.06.05
Abgaben bis 24.06.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^\tau$ ein n-dimensionaler, normalverteilter Zufallsvektor. Man zeige, dass die Einträge $cov(X_i, X_j)$, $i \neq j$ der Kovarianzmatrix genau dann null sind, wenn $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind, das heißt, dass in diesem Fall Unkorreliertheit und Unabhängigkeit äquivalent sind.

2.Aufgabe: Wir haben die Zufallsgrößen X und Y wie in Tutoriumsaufgabe 2.

(i) Man zeige, dass X und Y unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

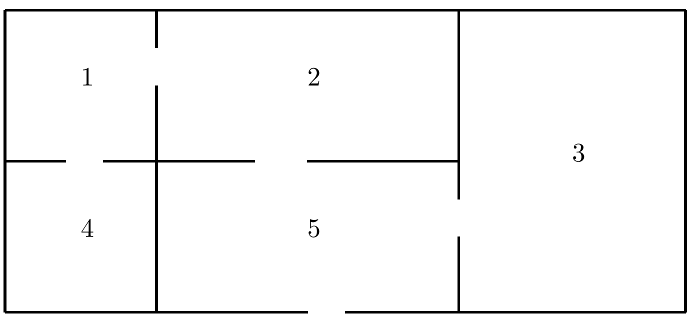
(ii) Widerspricht das nicht Aufgabe 1? Man erkläre dieses scheinbare Paradox.

3.Aufgabe: Seien X und Y zwei unabhängige, standard-normalverteilte Zufallsgrößen. Man zeige, dass auch

$$Z := \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \qquad W := \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

unabhängig und standard-normalverteilt sind.

4.Aufgabe: Ein Kaninchen versucht, aus dem untenstehenden Labyrinth zu entkommen. Das Kaninchen verläßt die Zelle i ($i = 1, \dots, 5$) durch einen Durchgang in ein Nachbarfeld mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit N_i^{-1}, wobei N_i die Anzahl der Ausgänge aus der Zelle i sei. Durch X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, werde der Ort beschrieben, an dem sich das Kaninchen zur Zeit n befindet.



(i) Man beschreibe den Aufenthaltsort des Kaninchens durch eine geeignete Markovkette und gebe deren ÜberganSmatrix an.

(ii) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Kaninchen in genau zwei bzw. drei Schritten aus der i-ten Zelle ($i = 1, \dots, 5$) das Labyrinth verläßt.

Jede Aufgabe 6 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: Man zeige, dass $X = (X_1, \ldots, X_n)^\tau$ genau dann n-dimensional normalverteilt mit Erwartungswertvektor m und Kovarianzmatrix C ist, falls jede Linearkombination $\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ der Komponenten $\mathcal{N}(\alpha^\tau m, \alpha^\tau C \alpha)$-verteilt ist.

Aufgabe 2: Seien X und Y zwei reelle Zufallsgrößen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & \text{falls } x \cdot \operatorname{sign} y \geq y \cdot \operatorname{sign} x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige, dass X, Y, $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ und $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ standard-normalverteilt sind.

Aufgabe 3: Sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsgröße, $a > 0$ und

$$Y := \begin{cases} X & \text{falls } |X| < a \\ -X & \text{falls } |X| \geq a. \end{cases}$$

Man zeige, dass Y ebenfalls $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt ist, der Zufallsvektor $(X,Y)^\tau$ jedoch nicht zweidimensional normalverteilt ist.