Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jürgen Gärtner
Übung: Stephan Sturm
Tutorien: Dana Ihlow, Alla Slynko, Stephan Sturm
Sekretariat: Monika Michel, MA 7-5

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

1.Blatt
Übungen 15.04.05
Abgaben bis 22.04.05

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Von den drei Ereignissen A_1, A_2, $A_3 \subseteq \Omega$ tritt/treten

(i) keines	(ii) mindestens eines	(iii) höchstens eines
(iv) genau eines	(v) mindestens eines nicht	(vi) genau zwei

ein. Man stelle die Ereignisse in (i) bis (vi) durch Mengenoperationen mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 und Ω dar.

2.Aufgabe: Sei (A_n) eine Folge von Ereignissen, man zeige

$$\text{(i)} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c$$

3.Aufgabe: Gallileo Galilei schrieb in *Sopra le scoperte dei dadi*, einer um 1620 entstanden Untersuchung über das Würfelspiel, über das gleichzeitige Werfen von drei Würfeln: *Obwohl* 9 *und* 12 *auf genau soviele Arten geworfen werden können wie* 10 *und* 11 *und deswegen als gleich wahrscheinlich betrachtet werden sollten, ist es trotzdem bekannt, dass lange Beobachtungen Würfelspieler dazu führten, die* 10 *und* 11 *als vorteilhafter einzuschätzen. Und es ist klar, dass* 9 *und* 10 *(ebenso wie* 12 *und* 11*), durch dieselbe Vielzahl von Kombinationen erreicht werden können:* 9 *durch 1.2.6, 1.3.5, 1.4.4, 2.2.5, 2.3.4, 3.3.3, was sechs Dreierkombinationen sind, und* 10 *durch 1.3.6, 1.4.5, 2.2.6, 2.3.5, 2.4.4, 3.3.4 und durch keine andere Kombination, was ebenso sechs Dreierkombinationen sind."* Man erkläre, warum die 10 von erfahrenen Würfelspielern dennoch als wahrscheinlicher eingestuft wird.

4.Aufgabe: Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, man gebe vier verschiedene σ-Algebren $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ an, so dass $(\Omega, \mathcal{F}_i)$ jeweils einen messbaren Raum bildet. Wieviele verschiedene σ-Algebren gibt es auf Ω?

5.Aufgabe: Seien A_n, B_n, C_n, B und C wie in Tutoriumsaufgabe 3. Man zeige $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n$ für alle n und $C \subseteq B$. Weiter gebe man ein Beispiel an, wo $C \neq B$ gilt.

6.Aufgabe: Sei Ω überabzählbar und $\mathcal{E} := \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ die Familie der ein-elementigen Teilmengen von Ω. Man zeige, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$ ist.

Jede Aufgabe 4 Punkte

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1: Ein Würfel wird N mal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

A_k "beim k-ten Wurf wird 3 geworfen",
B_k "beim k-ten Wurf wird 5 geworfen",
C_1 "5 wird nie geworfen",
C_2 "mindestens eine 5 und höchstens eine 3 wird geworfen".

(i) Man drücke die Ereignisse C_i durch A_k und B_k aus.

(ii) Man beschreibe das folgende Ereignis in Worten:
$D := \left\{\omega : \sum_{j=1}^{N} \left(1_{A_j}(\omega) - 1_{B_j}(\omega)\right) > 0\right\}$,

wobei

$$1_F(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Indikatorfunktion von F ist.

Aufgabe 2: Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und (A_n) eine Folge von Mengen aus $\mathcal{F}$. Man zeige

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Aufgabe 3: Sei (A_n) eine beliebige Folge von Ereignissen. Wir definieren

$$B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \quad \text{und} \quad C_n := \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,$$

und weiter

$$B := \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m \quad \text{und} \quad C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} A_m.$$

(i) Man zeige, dass

a) $B = \{\omega \in \Omega \ : \omega \in A_n$ für unendlich viele $n\}$,
b) $C = \{\omega \in \Omega \ : \omega \in A_n$ für alle bis auf endlich viele $n\}$.

(ii) Man zeige, dass für monoton wachsende Ereignisfolgen $(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots)$ $B = C$ gilt.

Hinweis: B wird oft als der *Limes Superior* der Ereignisfolge (A_n), $\limsup_{n\to\infty} A_n$ bezeichnet, C als *Limes inferior*, $\liminf_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 4: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, A, $B \subseteq \Omega$ mit $P[A] = \frac{3}{4}$ und $P[B] = \frac{1}{3}$.

(i) Man zeige, dass $\frac{1}{12} \leq P[A \cap B] \leq \frac{1}{3}$ gilt.

(ii) Man gebe einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und Mengen A, $B \subseteq \Omega$ an, bei denen die Grenzen in (i) erreicht werden.

Aufgabe 5: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, man zeige:

(i) Für A, $B \in \mathcal{F}$ mit $A \subseteq B$ gilt $P[A] \leq P[B]$.

(ii) Falls $A \in \mathcal{F}$ und (A_n) eine Folge von (nicht notwendigerweise disjunkten) Mengen in $\mathcal{F}$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist, so gilt

$$P[A] \leq \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

Hinweis: Die Eigenschaft in Punkt (ii) wird *Subadditivität* eines Wahrscheinlichkeitsmaßes genannt.