Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2009

# Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

*9.Blatt*
Übung: 09.06.09
Abgabe: 16.06.09

**Aufgabe 1**: Wir betrachten den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$\begin{aligned} dV_t &= -\alpha V_t\, dt + \beta\, dB_t; \\ V_0 &= v. \end{aligned}$$

Man berechne die Verteilung von $V_t$ für festes $t$ und analysiere die Asymptotik für $t \to \infty$.

**Aufgabe 2**: Wir betrachten im Folgenden die Varianz

$$dv_t = \alpha(\beta - v_t)\, dt + \gamma\sqrt{v_t}\, dW_t$$

im Heston-Modell mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma \geq 0$. Mit $P_t(v|v_i)$ bezeichnen wir die bedingte Dichte, definiert durch $P_t(v|v_i)\, da := P(v_t \in da | v_i = v_0)$.

i) Unter der Bedingung, dass die "Dimension" $d = \frac{4\alpha\beta}{\gamma^2}$ größer als 2 ist, leite man die Fokker-Planck-Gleichung für $P_t(v|v_i)$ her.
ii) Man berechne die invarainte Verteilung von $v$ explizit, indem man zeigt, dass die entsprechende Gleichung für stationäre Dichten (also $\frac{\partial}{\partial t}P_t(v|v_i) = 0$) der Dichte einer (geeignet parametrisierten) Gamma-Verteilung entspricht.

**Aufgabe 3**: Will man einen CIR-Prozess

$$dv_t = \alpha(\beta - v_t)\, dt + \gamma\sqrt{v_t}\, dW_t$$

mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma > 0$ numerisch modellieren, so ist das stochastische Eulerverfahren nicht gut geeignet, da die Gaußschen Inkremente nicht nach unten beschränkt sind und so der Prozess negativ werden kann, was der analytischen Lösung widerspricht. Um dieses Problem zu umgehen, kann man wie folgt vorgehen:

i) Man leite aus der SDE für $v$ und für die Zerlegung $t_i = iT/n$ von $[0, T]$ das implizite Rekursionsschema

$$v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \big(\alpha\beta - \gamma^2/2 - \alpha v_{t_{i+1}}\big)T/n + \gamma\sqrt{v_{t_{i+1}}}\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

her, indem man die SDE mit Hilfe von Stratonovich-Integralen umschreibt und diese dann approximiert.

ii) Man zeige, dass sich für $\gamma^2 < 2\alpha\beta$ und $\alpha \leq n/T$ hieraus die explizite Darstellung

$$v_{t_{i+1}} = \left(\frac{\gamma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{\gamma^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + 4(v_{t_i} + (\alpha\beta - \gamma^2/2)t/n)(1 + \alpha T/n)}}{2 + 2\alpha T/n}\right)^2$$

gewinnen lässt.

**Aufgabe 4**: Man programmiere in einer höheren Programmiersprache ein Programm, das die folgenden Schritte durchführt.

i) Man benutze den Algorithmus von Aufgabe 3, um im Heston Modell mit den Parametern $\alpha = 2$, $\beta = 0,4$, $\gamma = 0,25$, $\rho = 0$, $r = 0$, $T = 1$, $S_0 = 100$ und $v_0 = 0,4$ die Preise der Europäischen Call-Optionen mit Strikes $K = 80 + 2i$, $i = 0, \dots 20$ zu berechnen (Monte-Carlo Simulation mit 1000 Durchläufen).

ii) Aus den gewonnen Call-Preisen berechne man nun jeweils die implizite Volatilität und fertige eine Grafik an, auf der die impliziten Volatilitäten zu den jeweiligen Strikes aufgetragen werden.

Jede Aufgabe 6 Punkte