

## Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

7. Blatt

Übung: 26.05.09

Abgabe: 02.06.09

**Aufgabe 1:** Bei einer Chooser-Option zu gegebener Maturität  $T$  und gegebenem Strike  $K$  kann der Käufer zu einem festgelegten Zeitpunkt  $t_0 \in ]0, T[$  entscheiden, ob die Option einen Call oder einen Put (mit Strike  $K$  und Maturität  $T$ ) darstellt. (Dies tut er natürlich auf "vernünftige" Weise.)

- Man gebe das Auszahlungsprofil der Chooser-Option an.
- Man berechne den arbitragefreien Preis der Chooser-Option im Black-Scholes Modell.

**Aufgabe 2:** Man benutze die Girsanov-Transformation, um die folgende Relation zwischen Call- und Put-Preisen in einem Black-Scholes-Modell mit Zinsrate  $r = 0$  zu beweisen:

$$E_z^* [(S_T - K)^+] = zK E_{\frac{z}{K}}^* \left[ \left( \frac{1}{K} - S_T \right)^+ \right] = E_K^* [(z - S_T)^+],$$

wobei  $E_z^*[f(S_T)]$  den Erwartungswert  $E_{P^*}[f(S_T)]$  mit der Anfangsbedingung  $S_0 = z$  für die geometrische Brownsche Bewegung unter dem äquivalenten Martingalmaß  $P^*$  bezeichnet.

**Aufgabe 3:** Es sei  $K > B > 0$ ,  $z > B$  und  $\tau_B := \inf\{t : S_t = B\}$ . Man benutze die starke Markoveigenschaft und die Resultate über den Zusammenhang von Call- und Putpreisen von Aufgabe 2, um in folgenden Schritten den Preis eines *Down-and-in* Calls für Zinsrate  $r = 0$  im Black-Scholes Modell zu berechnen.

- In einem ersten Schritt zeige man, dass

$$E_z^* [(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_{\tau_B}] (\omega) = \frac{K}{B} E_B^* \left[ \left( \frac{B^2}{K} - S_{T-\tau_B(\omega)} \right)^+ \right]$$

$P_z^0$ -fast sicher auf  $\{\tau_B \leq T\}$  gilt.

- Hieraus folgere man nun, dass der Preis des *Down-and-in* Calls gegeben ist durch

$$E_z^* [(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_B \leq T\}}] = \frac{K}{B} E_z^* \left[ \left( \frac{B^2}{K} - S_T \right)^+ \right] = E_B^* \left[ \left( S_T - \frac{zK}{B} \right)^+ \right].$$

**Aufgabe 4:** Viele exotische Optionen hängen von Funktionalen des Pfades  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ , wie  $\max_{0 \leq t \leq T} S_t$  oder  $\int_0^T S_t dt$ , ab. Im Folgenden sei  $S$  eine geometrische Brownsche Bewegung mit Volatilität  $\sigma$  und Drift  $\mu$ .

- Man gebe Itô-Formeln für glatte Funktionen der Prozesse  $(t, S_t, A_t)$  und  $(t, S_t, M_t)$  an, wobei

$$A_t := \int_0^t S_s ds \quad \text{und} \quad M_t := \max_{0 \leq s \leq t} S_s.$$

- Man gebe partielle Differentialgleichungen (gegebenenfalls mit Randbedingungen) an, die eine glatte Funktion  $v : [0, \infty) \times (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen muss, damit  $v(t, S_t, A_t)$  bzw.  $v(t, S_t, M_t)$  Wertprozesse selbstfinanzierender Handelsstrategien sind.