Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

6.Blatt
Übung: 19.05.08
Abgabe: 26.05.08

Aufgabe 1:

a) Man zeige, dass die im Black-Scholes-Modell durch die geometrische Brownsche Bewegung generierten Maße auf $C[0,T]$ für verschiedene Volatilitäten singulär sind. Exakter: Für eine Brownsche Bewegung W und $|\sigma_1| \neq |\sigma_2|$ sind die durch

$$S_t^i = \exp\left(\sigma_i W_t - \frac{1}{2}\sigma_i^2 t\right), \qquad i \in \{1,2\}$$

implizierten Maße $P_i = (S_i)_* P := P \circ (S^i)^{-1}$ auf $C[0,T]$ singulär: $P_1 \perp P_2$ (d.h. es gibt eine messbare Menge A mit $P_1[A] = 0$ und $P_2[A] = 1$).

b) Nun betrachte man das analoge Black-Scholes-Modell auf $C[0,T]$ mit

$$S_t^i = \exp\left(\sigma W_t + (r_i - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right), \qquad i \in \{1,2\},$$

$r_1 \neq r_2$. Man treffe eine Aussage über Singularität bzw. Absolutstetigkeit der implizierten Maße.

c) Wir betrachten nun das analoge Black-Scholes-Modell mit

$$S_t^i = \exp\left(\sigma_i W_t + (r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)t\right), \qquad i \in \{1,2\},$$

auf $C[0,\infty[$. Man gebe eine Bedingung für die r_i und σ_i an, so dass die Maße P_1 und P_2 äquivalent sind.

Aufgabe 2:

a) Zwei stetige, in L^2-beschränkte Martingale M und N mit $M_0 = N_0 = 0$ heißen schwach orthogonal, falls $E[M_s N_t] = 0$ für alle s, $t \geq 0$. Man zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:
   i) M und N sind schwach orthogonal;
   ii) $E[M_s N_s] = 0$ für alle $s \geq 0$;
   iii) $E[\langle M, N\rangle_s] = 0$ für alle $s \geq 0$;
   iv) $E[M_\tau N_s] = 0$ für alle $s \geq 0$ und alle Stoppzeiten $\tau \geq s$.

b) Zwei stetige, in L^2-beschränkte Martingale M und N mit $M_0 = N_0 = 0$ heißen (stark) orthogonal, falls MN ebenfalls ein Martingal ist.
   a) Man zeige, dass M und N genau dann orthogonal sind, wenn $E[M_\tau N_s] = 0$ für alle $s \geq 0$ und alle Stoppzeiten $\tau \leq s$.
   b) Man gebe ein Beispiel von Martingalen M und N an, die schwach orthogonal, nicht aber orthogonal sind.

Aufgabe 3: (*Das Volatilitätssprungmodell)*: Wir betrachten das folgende Modell für einen Finanzmarkt mit stochastischer Volatilität: Die risikolose Zinsrate r sei 0, W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und der Preisprozess S sei gegeben durch

$$S_t = \exp\left(\int_0^t \sigma_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 \, ds\right),$$

wobei σ_s für $s < T/2$ konstant $\sigma_0 > 0$ sei. In $T/2$ springt die Volatilität auf den zufälligen Wert $\sigma_{T/2}$ und bleibt dort, d.h. $\sigma_t = \sigma_{T/2}$ für $T/2 \leq t \leq T$. Wir nehmen an, dass $\sigma_{T/2}$ und W unabhängig seien und das $\sigma_{T/2}$ eine nichttriviale Verteilung besitzt. Man zeige, dass dieses Modell unvollständig ist, genauer: es gibt unendlich viele äquivalente Martingalmaße.

Aufgabe 4: *Ein alternativer, konstruktiver Beweis des Itôschen Darstellungssatzes*

i) Sei W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktionen und $H := f(W_T)$. Man konstruiere einen vorhersehbaren Prozess ξ mit

$$H = E[H] + \int_0^T \xi_s \, dW_s,$$

indem man die (duale) Wärmeleitungsgleichung mit geeigneten Randbedingungen löst. Man zeige weiterhin, dass $\int \xi \, dW$ ein quadratintegrierbares Martingal ist.

ii) Nun betrachten wir stetige und beschränkte Funktionen auf $\mathbb{R}$, $0 = t_0 \leq t_1 < \cdots t_n = T$ und

$$H := \prod_{i=1}^n f_i(W_{t_i}).$$

Man konstruiere wiederum einen vorhersehbaren Prozess ξ mit

$$H = E[H] + \int_0^T \xi_s \, dW_s,$$

indem man nun sukzessive auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n], \ldots, [t_0, t_1]$ die (duale) Wärmeleitungsgleichung mit geeigneten Randbedingungen löst.

iii) Man zeige, dass die Familie aller H der Form $\prod_{i=1}^n f_i(W_{t_i})$ dicht in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ liegt.

iv) Für welche H gilt nun das Darstellungsresultat? Ist diese Darstellung eindeutig?

Bemerkung: Im Kontext eines Finanzmarktmodells lässt sich H von ii) auch als Auszahlungsfunktion einer sogenannten *Fade*-Option oder einer Asiatischen Option mit geometrischer Mittelung interpretieren.