Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

5.Blatt
Übung: 12.05.08
Abgabe: 19.05.08

Aufgabe 1: Wir betrachten im Black-Scholes Setting den Fall einer kontinuierlichen Dividendenzahlung (was eine gute Approximation etwa für Fonds, die aus etlichen Aktien bestehen, ist). Die kontinuierliche Dividenenzahlung mit der Rate δ reduziert den Wert der Aktie um diesen Betrag, die Stochstische Differentialgleichung für den Preisprozess der Aktie lautet also

$$dS_t = \sigma S_t \, dW_t + (r - \delta) S_t \, dt.$$

Die Dividenen werden sofort auf unseren Cash Account transferiert. Man stelle für diese Modell die entsprechende Black-Scholes-Differentialgleichung auf und berechne den Preis einer Europäischen Call-Option.

Aufgabe 2: Wir betrachten im Black-Scholes-Model die Anlagestrategie des *Constant Proportional Portfolio Insurance (CPPI)*: Wir investieren einen konstanten Anteil unseres Vermögens in die Aktie (also $\theta_t = \beta V_t / S_t$, $\beta \in \mathbb{R}$).

a) Man stelle die stochastische Differentialgleichung für den Vermögensprozess V_t auf und löse sie explizit.
b) Man finde diejenige Investitionsstrategie, die das schnellste exponentielle Wachstum hat, man bestimme also β so, dass es den Erwartungswert von $\log V_t$ maximiert.

Aufgabe 3: Wir betrachten einen Finanzmarkt $\bar{S} = (S^0, S) = (S^0, S^1, \ldots, S^d)$, der aus $d+1$ Anlagen besteht, und zwar aus einem Cash Account und d riskanten Asssts:

$$\begin{aligned} S_t^0 &= \exp\Big(\int_0^t r_s \, ds \Big); \\ dS_t^i &= r_t S_t^i \, dt + \sigma^i S_t^i \, dW_t^i \quad S_0^i = s_0^i, \quad i = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Hier sind die W^i unabhänge Brownsche Bewegungen und $0 < r_s, \sigma_s < \infty$. Eine vorhersagbare und beschränkte Strategie $\bar{\xi} = (\xi^0, \xi)$ ist bekanntlich selbstfinanzierend, falls der Wertprozess $V_t = V_0 + \sum_{i=0}^d \xi_t^i S_t^i$ die stochastische Differentialgleichung

$$dV_t = \bar{\xi} \, d\bar{S}_t = \sum_{i=0}^d \xi_s^i \, dS_s^i$$

erfüllt. Man zeige, dass dies äquivalent zu den folgenden Bedingungen ist.

a) Der diskontierte Wertprozess $\tilde{V}_t := \frac{V_t}{S_t^0}$ erfüllt bezüglich $\tilde{S}_t := \frac{S_t^i}{S_t^0}$, $i = 0, \ldots, d$ die stochastische Differentialgleichung
$$d\tilde{V}_t = \xi \, d\tilde{S}_t.$$
b) Der Wertprozess unter dem Numéraire N, $N \in \{S^1, \ldots, S^d\}$, $\tilde{V}_t^N := \frac{V_t}{N_t}$ erfüllt bezüglich $\tilde{S}_t^{N,i} := \frac{S_t^i}{N_t}$, $i = 0, \ldots, d$ die stochastische Differentialgleichung
$$dV_t^N = \xi^N \, d\tilde{S_t^N}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 4:

a) Man schreibe in einer höheren Programmiersprache ein Programm, das zur Simulation von Pfaden einer geometrischen Brownschen Bewegung für $0 \leq t \leq 1$ genutzt werden kann. Dabei soll der Nutzer den Drift α, die Volatilität σ und den Anfangswert S_0 der geometrischen Brownschen Bewegung sowie die Anzahl der Stützstellen n und die Anzahl der zu simulierenden Pfade angeben können. Es soll zum Einen die explizite Formel

$$S_t = S_0 \exp\Big(\sigma W_t - \big(\frac{1}{2}\sigma^2 - \alpha\big)t\Big)$$

und zum Anderen sie entsprechende stochastische Differentialgleichung für die pfadweise Simulation genutzt werden.
Abzugeben sind der Programmcode und Plots von je 15 Pfaden für je beide Methoden mit $\alpha = 1,5$, $\sigma = 0,3$, $S_0 = 100$ und $n = 2^{10} + 1$.

b) Man benutze dieses Programm, um den Preis einer Europäischen at the Money-Call-Option (also Strike $K = 100$) zu berechnen, wobei der Aktienkurs durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit den obigen Parametern gegeben ist und der Cash Account mit $r = 1,05$ verzinzinst wird.