Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

4.Blatt
Übung: 05.05.08
Abgabe: 12.05.08

Aufgabe 1: Man beweise die Itô-Formel für die geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t := S_0 \exp\left(\sigma W_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right):$$

Ist $f(t,s) \in C^{1,2}$, so gilt

$$\begin{aligned} df(t,S_t) &= f_s(t,S_t)\,dS_t + (L_0 f(t,S_t) + f_t(t,S_t))\,dt \\ &= f_s(t,S_t)\sigma S_t\,dB_t + (L_\alpha f(t,S_t) + f_t(t,S_t)\,dt, \end{aligned}$$

wobei für $\alpha \in \mathbb{R}$ der Differentialoperator L_α durch

$$L_\alpha f(t,s) := \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 f_{ss}(t,s) + \alpha s f_s(t,s).$$

gegeben ist.

Aufgabe 2: *Alternativer Beweis der Itô-Formel*:

i) Mit Hilfe von Itôs Produktregel/partieller Integrationsformel zeige man, dass die (d-dimensionale) Itô-Formel

$$f(S_t) - f(S_0) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(S_s)\,dS_s + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} f(S_s)\,d\left\langle S^i, S^j\right\rangle_s$$

für Polynome $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und stetige Semimartingale S gilt.

ii) Durch geeignete Approximation durch Polynome übertrage man das Resultat auf beliebige Funktionen $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 3: Es sei W eine d-dimensionale Brownsche Bewegung, $d \geq 3$, $x \neq 0$. Es kann gezeigt werden, dass $W_t \neq -x$ für alle t P-f.s. und $\lim_{t\to\infty} |W_t| = \infty$ P-fast sicher (Transienz) gilt.

i) Sei $h(y) := |y|^{2-d}$. Man zeige, dass h harmonisch in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ist, d.h. dass $\triangle h = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

ii) Man folgere aus i), dass $M_t := h(W_t + x)$ ein stetiges lokales Martingal ist.

iii) Man zeige nun, dass M_t beschränkt in L^p, $p \in [1, \frac{d}{d-2})$, und somit die Familie $(M_t)_{t\geq 0}$ gleichgradig integrierbar ist.

iv) Man folgere nun, dass für $t \uparrow \infty$ aber $E[M_t] \to 0$ gilt und somit M kein echtes Martingal sein kann.

Aufgabe 4: Sei θ eine bzgl. des stetigen Martingals M integrierbare Strategie. Man zeige, dass es dann zu jedem $\epsilon > 0$ eine Strategie gibt, die bis zum Zeitpunkt T das Anlageportfolio fast sicher nur endlich oft umschichtet und deren Wertprozess maximal um ϵ von dem von θ induzierten abweicht.

Genauer zeige man, dass es ein θ^ϵ der Form

$$\theta^\epsilon = \sum_i \vartheta_i 1_{]T_{i-1},T_i]}$$

gibt, so dass

1) $0 = T_0 \leq T_1 \leq \ldots$ eine wachsende Folge von Stoppzeiten mit $P[T_n = T \text{ für hinreichend grosses } n] = 1$ ist und
2) $\max_{t\in[0,T]} | \int_0^t \theta \, dM - \int_0^t \theta^\epsilon \, dM| \leq \epsilon$ fast sicher gilt.

Zusatzfragen: Gilt ein analoges Resultat auch für stetige Semimartingale? Was ist mit unstetigen (Semi-)Martingalen? *(bis zu 2 Zusatzpunkte)*

Hinweis: Man mache sich klar, dass die Aufgabe leicht zu lösen wäre, wenn man die Approximation in 2) nur mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \epsilon$ fordern würde. Man betrachte dann $\epsilon_n = \epsilon/2^n$ und konstruiere θ^ϵ induktiv, indem man eine einfache Strategie wählt, die Punkt 2) bei Maximalabweichung ϵ_n mit Wahrscheinlichkeit $1 - \epsilon_n$ erfüllt, und indem man für die restliche Laufzeit der Strategie zu einer noch besseren einfachen Approximation wechselt, wenn besagte Abweichung doch zu gross wird. Ein Borel-Cantelli-Argument liefert dann, dass letzteres fast sicher nur endlich oft passieren wird.