Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

3.Blatt
Übung: 28.04.09
Abgabe: 05.05.09

Aufgabe 1:

a) Es sei W_t eine (Standard-)Brownsche Bewegung. Man berechne $E[W_t^n]$ für $n \in \mathbb{N}$ auf zwei verschiedene Arten: Einerseits rekursiv mit Hilfe der Itô-Formel, andererseits direkt über die Verteilung von W_t.

b) Es sei W_t eine Brownsche Bewegung mit Startpunkt $x \neq 0$. Man stelle X_t mit Hilfe der Itô-Formel in der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^T f(W_s)\, dW_s + \int_0^t g(W_s)\, ds$$

dar. Man argumentiere auch, warum man die Itô-Formel im jeweiligen Fall anwenden darf.

i) $X_t = \cos(W_t)$;
ii) $X_t = 5 + t^2 + e^{W_t}$;
iii) $X_t = \ln\big((W_t)^2\big)$.

Aufgabe 2: Es seien X und Y zwei stetige Semimartingale, $X = M + A$, $Y = N + B$, wobei M und N stetige lokale Martingale und A, B rechtsstetige Prozesse von beschränkter Totalvariation sind. Weiterhin definieren wir für einstetiges Semimartingal Z das *stochastisches Exponential* $\mathcal{E}(\cdot)$ als Lösung der stochastischen Differentialgleichung (SDE)

$$d\mathcal{E}(Z)_t := \mathcal{E}(Z)_t dZ_t; \qquad \mathcal{E}(Z)_0 = 1.$$

Man zeige:

(i) Die Lösung der stochastischen Differentiagleichung ist eindeutig, indem man die Itô-Formel auf den Quotienten zweier Lösungen anwendet.

(ii) Für jedes $t \in [0, \infty[$ gilt P-fast sicher

$$\mathcal{E}(X+Y)_t = \mathcal{E}(X)_t \mathcal{E}(Y)_t \exp\left(-\langle M, N\rangle_t\right),$$

wiederum via Itô-Formel.

Aufgabe 3: Es sei X ein stetiges Semimartingal, und (θ^n) eine Folge von vorhersehbaren Prozessen, die punktweise gegen Null konvergiert. Man beweise die folgende *stochastische Form des Satzes von Lebesgue* über dominierte Konvergenz:

(i) Gibt es zu $X = M + A$, M ein lokales Martingal und A ein Prozess von beschränkter Totalvariation, einen vorhersehbaren stochastischen Prozess $\theta \in L^2(\Omega \times [0,T], P \otimes d\langle M\rangle_t) \cap L^1(\Omega \times [0,T], P \otimes |d\langle A\rangle_t|)$ mit $|\theta^n| < \theta$ fast sicher, dann konvergiert

$$\int \theta_s^n \, dX_s$$

in L^2 gleichmäßig gegen 0 auf jedem Kompaktum. Insbesondere gilt für $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \theta_s^n \, dX_s \right| = 0$$

in L^2.
(*Hinweis*: Die Doob-Ungleichung in stetiger Zeit lautet: Ist $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein rechtsstetiges Martingal oder ein positives Submartingal, so gilt für $X^* := \sup_{t\in[0,T]} |X_t|$, $p \geq 1$ und $\lambda \geq 0$

$$\lambda^p P[X^* \geq \lambda] \leq \sup_{t\in[0,T]} E[|X_t|^p]$$

und für $p > 1$

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|_p)$$

(ii) Man formuliere und beweise die analoge Aussage für $\theta \in L^2(X)$ und stochastische Konvergenz.

Aufgabe 4: Sei X_t die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = X_t \, dW_t,$$

wobei W_t eine Brownsche Bewegung bezeichnet und weiterhin

$$\tau := \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t \geq 2 \,\vee\, X_t \leq \frac{1}{2}\}$$

eine Stoppzeit ist. Man berechne $E[e^{-\tau}]$, indem man eine Funktion u findet, so dass

$$\begin{cases} V_t & := & u(X_t)e^{-t} \text{ ist ein lokales Martingal} \\ u(2) = u(\frac{1}{2}) & = & 1 \end{cases}$$

gilt.