Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

12. und letztes Blatt
Übung: 30.06.09
Abgabe: 07.07.09

Aufgabe 1:

i) Sei W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\tilde{P}$ die Verteilung von $B_t = W_t + bt$, $b \in \mathbb{R}$, und τ eine Stoppzeit mit $P[\tau < \infty] = 1$. Man zeige, dass

$$E[e^{bW_\tau - \frac{b^2}{2}\tau}] = \tilde{P}[\tau < \infty].$$

ii) Sei nun

$$S_t = s \exp\Big(\sigma W_t + \big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\big)t\Big).$$

Man zeige, dass für die *first passage time* von a, $s > a$,

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : S_t \leq a\}$$

gilt, dass für $\mu \leq \sigma^2/2$ die Wahrscheinlichkeit $P[\tau_a < \infty] = 1$.

iii) Man zeige mit Hilfe von i) und ii), dass für den Erwartungswert der Laplace-Transformierten von τ_a unter dem Martingalmaß

$$E^*[e^{-\mu\tau_a}] = \Big(\frac{a}{s}\Big)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}, \qquad \mu \geq 0,\ \sigma > 0,$$

gilt.

Aufgabe 2: *American Perpetual Put*
Diese Aufgabe soll zur Berechnung des Preises eines *Perpetual American Put*, also einer Amerikanischen Put-Option mit unendlichem Zeithorizont, im Black-Scholes Modell dienen. Gegeben ist also die Dynamik des Aktienkurses

$$S_t = s \exp\Big(\sigma W_t^* + \big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\big)t\Big), \qquad r \geq 0,\ \sigma > 0,$$

und die Auszahlung

$$H_t := (K - S_t)^+, \qquad t \geq 0.$$

Gesucht ist der Preis

$$\Pi(H) = \sup_\tau E^*[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+],$$

wobei das Supremum über alle Stoppzeiten $\tau \geq 0$ genommen wird.

i) In einem ersten Schritt beschränken wir uns auf die *Passierzeiten*, also Stoppzeiten der Form

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 \,:\, S_t \leq a\}$$

für $a \leq K$. Die "Performance" der jeweiligen Stoppzeit ist gegeben durch die Funktion

$$g_a(s) = E^*[e^{-r\tau_a}(K - S_{\tau_a})^+ \mid S_0 = s].$$

Man maximiere $g_a(s)$ über alle $a \in [0, K]$ mit Hilfe von Aufgabe 3.

ii) Sei nun a^* das entsprechende Maximum. Man zeige mit Hilfe der Itô-Formel, dass

$$\Big(g_{a^*}(S_{t\wedge\tau})e^{-r(t\wedge\tau)}\Big)_{t\geq 0} \qquad \text{ein } P^*\text{-Supermartingal für jede Stoppzeit } \tau \text{ und}$$
$$\Big(g_{a^*}(S_{t\wedge\tau_{a^*}})e^{-r(t\wedge\tau_{a^*})}\Big)_{t\geq 0} \qquad \text{ein } P^*\text{-Martingal ist.}$$

Man diskutiere die Anwendbarkeit der Itô-Formel in diesem Fall!

iii) Man zeige, dass für jede Stoppzeit $\tau > 0$

$$E^*[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+] \leq E^*[e^{-r\tau_{a^*}}(K - S_{\tau_a^*})^+]$$

gilt.

Aufgabe 3:

i) Beim Quantil-Hedging haben wir uns auf zulässige Strategien θ beschränkt, für die der Wertprozess nichtnegativ ist ($V_t \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$). Um diese Beschränkung zu verstehen, zeige man, dass das Problem schlecht gestellt ist, wenn man versucht über alle zulässigen Strageien θ (also solche, deren Wertprozess nach unten beschränkt ist), zu maximieren.

ii) Nun nehmen wir an, dass bei einem fixen Zinssatz $r = 0$ ein fixer Kreditrahmen $c > 0$ gegeben ist, wir uns also auf zulässige Strategien θ beschränken, für die $V_t > -c$ für alle $t \in [0, T]$ gilt. Man maximiere $P[V_T \geq H]$ für über diese Strategien.

Aufgabe 4: Wir betrachten im Folgenden ein Optimierungsproblem für den Temporalnutzen in einem vollständigen Markt mit Zinssatz $r = 0$, wollen also

$$E\left[\int_0^T e^{-\delta t} u(c_t)\, dt\right]$$

für eine wachsende, konkave und zweimal differenzierbare Nutzenfunktion u, die die Inada-Bedingungen erfüllt, maximieren, wobei der Wertprozess V durch

$$dV_t = \theta\, dS_t - c_t\, dt, \qquad V_0 = x > 0,$$

gegeben ist. Man leite eine Bedingung 1. Ordnung für den optimalen Konsumplan her, indem man den erwarteten Nutzen mit Hilfe der Superherdging-Bedingung $E^*[\int_0^T c_t\, dt] \leq x$ nach oben abschätzt, zur konvex Konjugierten übergeht, die Preisdichte durch $u'(c_t^*)$ darstellt und den optimalen Konsumplan c_t^* bestimmt.

Zusatzaufgabe (*bis zu 12 Zusatzpunkte*):
Ein lokales Martingal, das kein gleichgradig integrierbares echtes Martingal ist, heißt *striktes lokales Martingal*. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass es zwei stetige stochastische Prozesse X, Y gibt, so dass

i) der Prozess X ein striktes lokales Martingal mit $X_\infty > 0$ fast sicher ist,

ii) der Prozess Y ein gleichgradig integrierbares (echtes) Martingal ist und auch,

iii) der Prozess XY ein gleichgradig integrierbares (echtes) Martingal ist.

Hierzu gehen wir wie folgt vor: Seien W^1 und W^2 zwei unabhängige Brownsche Bewegungen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ erzegut durch (W^1, W^2). Wir definieren zwei Prozesse

$$L_t := e^{W_t^1 - \frac{1}{2}t} \qquad M_t := e^{W_t^2 - \frac{1}{2}t}$$

und zwei Stoppzeiten

$$\tau := \inf\{t \,:\, L_t = 1/2\} \qquad \sigma := \inf\{t \,:\, M_t = 2\}.$$

Nun sei

$$X_t := L_t^{\tau\wedge\sigma} \qquad Y_t := M_t^{\tau\wedge\sigma},$$

man zeige dass X und Y die Bedingungen i)-iii) erfüllen.
Anmerkung: Die gleichgradige Integrierbarkeit von XY kann mit Hilfe von

$$E[L_{\tau\wedge\sigma}] = \frac{1}{2}P[\sigma = \infty] + P[\sigma < \infty] = \frac{3}{4} < 1$$

gezeigt werden.