Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

11.Blatt
Übung: 23.06.09
Abgabe: 30.06.09

Aufgabe 1: Wir betrachten das HJM-Modell, das durch die Volatilität

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-a(T-t)}$$

definiert ist. Man zeige, dass dieses Modell einem Short-Rate Modell entspricht und bestimme dieses Modell und seine Parameter.

Aufgabe 2: Wir betrachten einen Euro- und einen Dollar-Bond-Markt mit Bond-Preisen $P^E(t,T)$ und $P^D(t,T)$. Die Euro-Forward-Rates $f^E(t,T)$ seien durch ein HJM Modell

$$df^E(t,T) = \alpha^E(t,T)\,dt + \sigma^E(t,T)\,dW_t^E$$

gegeben, wobei W^E eine n-dimensionale Brownsche Bewegung unter dem Euro-Martingalmaß Q ist. Weiters sei die Dynamik der Dollar-Forward-Rates $f^E(t,T)$ gegeben durch

$$df^D(t,T) = \alpha^D(t,T)\,dt + \sigma^D(t,T)\,dW_t^E,$$

ebenfalls unter dem Euro-Martingalmaß Q (also mit derselben Brownschen Bewegung). Weiterhin sei der Wechselkurs X (in Euroeinheiten pro Dollar) durch

$$dX_t = \mu_t X_t\,dt + \sigma_t^X X_t\,dW_t^E$$

unter dem Maß Q gegeben. Man zeige, dass die HJM-Drift-Bedingung unter diesem Maß Q gegeben ist durch

$$\alpha^D(t,T) = \sigma^D(t,T)\left(\int_t^T \big(\sigma^D(t,s)\big)^\tau\,ds - \big(\sigma_t^X\big)^\tau\right).$$

Aufgabe 3: Ein *Consol Bond* ist ein Bond mit unendlicher Laufzeit, der keine Endauszahlung besitzt, aber der eine kontinuierliche Couponzahlung von $1\,dt$ auzahlt. Der Preis $C(t)$ eines Consol Bonds ist also durch

$$C(t) = \int_t^\infty P(t,s)\,ds$$

gegeben. Die Dynamik der Bond Preise unter dem Martingalmaß Q sei durch

$$dP(t,T) = P(t,T)r(t)\,dt + P(t,T)v(t,T)\,dW_t$$

gegeben, wobei W eine n-dimensionale Q-Brownsche Bewegung ist. Man beweise, dass die Dynamik der Preise des Consol Bonds durch

$$dC(t) = C(t)\big(r(t)-1\big)\,dt + \sigma_t^C dW_t;$$
$$\sigma_t^C = \int_t^\infty P(t,s)v(t,s)\,ds$$

beschrieben wird.

Aufgabe 4: In einem zinsfreien, illiquiden Markt ($r = 0$) betrachten wir das Nutzenoptimierungsproblem für die exponetiellen Nutzenfunktion

$$u(x) = -e^{-\alpha x}, \qquad \alpha > 0,$$

und den Wertprozess

$$\begin{aligned} dV_t^x &= \theta_t(\sigma\, dW_t + \mu\, dt) - \frac{\beta}{2}\theta_t^2\, dt, \\ V_0^x &= x. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\beta > 0$ eine Konstante, die die Illiquidität des Marktes beschreibt.

i) Man leite die Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung für die Wertfunktion

$$U(x, T) = \sup_{\theta \in \Theta} E[u(V_T^x)]$$

her, wobei Θ die Menge aller fast-sicher quadratintegrierbaren, vorhersehbaren Strategien ist.

ii) Man löse diese HJB-Gleichung zu einem geeigneten Randwert mit Hilfe des Separationsansatzes explizit.

iii) Man begründe, warum wir für $\beta > 0$ jede fast-sicher quadratintegrierbare, vorhersehbare Strategie zulassen können und bestimme die optimale Strategie θ^*.