Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

10.Blatt
Übung: 16.06.09
Abgabe: 23.06.09

Aufgabe 1: Wir betrachten das Dothan-Modell für die Zinsratenentwicklung

$$dr_t = a\, r_t\, dt + \sigma\, r_t\, dW_t^*$$

Man zeige, dass unter dem Maß P^*

$$E^*\left[e^{\int_0^t r_s\, ds}\right] = \infty$$

gilt.

Aufgabe 2: Man berechne im Cox-Ingersoll-Ross-Modell

$$dr_t = a(b - r_t)\, dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t^*$$

die bedigten Erwartungen und Varianzen

$$E^*[r_t|\mathcal{F}_s] \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}^*[r_t|\mathcal{F}_s].$$

Aufgabe 3: Wir betrachten im Vasiček-Modell

$$dr_t = (b - a\, r_t)\, dt + \sigma\, dW_t^*$$

ein *Zinsraten-Caplet* mit *Cap-Rate* R

$$(T_i - T_{i-1})\Big(L(T_{i-1}, T_i) - R\Big)^+.$$

Hierbei ist die LIBOR spot rate gegeben durch

$$L(S,T) = -\frac{P(S,T) - 1}{(T-S)P(S,T)}.$$

Man berechne den arbitragefreien Preis des Caplets, indem man es auf eine Put-Option zurückführt und diese dann im Vasiček-Modell preist.

Aufgabe 4: Wir betrachten die *Hermite-Polynome* (vgl. Übung).

i) Man zeige, dass eine äquivalente Definition der Hermite-Polynome durch

$$H_0(x) := 1, \qquad H_n(x) := (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad n \geq 1$$

gegeben ist.

ii) Man beweise die Entwicklung

$$\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

iii) Weiterhin folgere man, dass die *Hermite-Funktionen*

$$h_n(x,t) := t^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

die Relation

$$\frac{\partial}{\partial x} h_n(x,t) = n h_{n-1}(x,t)$$

efrüllen und somit die duale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} h_n(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_n(x,t) = 0.$$

lösen.

iv) Sei nun $(W_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung; man zeige, dass $h_n(W_t, t)$ ein stetiges Martingal ist und

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} dW_{t_n} \cdots dW_{t_2} dW_{t_1} = \frac{1}{n!} h_n(W_t, t)$$

gilt. Das heißt, die Hermite-Funktionen spielen im Itô-Kalkül dieselbe Rolle wie die Monome x^n im Leibnizschen Differentialkalkül.