Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Blatt
Übung: 14.04.09
Abgabe: 21.04.09

Aufgabe 1: Es sei (B_t) eine (Standard-)Brownsche Bewegung, man zeige

a) dass die Zufallsvariable
$$Z(\omega) := \int_0^1 B_s(\omega)\, ds$$
normalverteilt ist und bestimme Erwartungswert und Varianz.

b) mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass die Nullstellenmenge von (B_t) im Intervall $[0,1]$,
$$N(\omega) := \{t \in [0,1] \,:\, B_t(\omega) = 0\} \in \mathcal{B}([0,1]),$$
eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Aufgabe 2: Es seien A_t und B_t, $t \geq 0$, zwei rechtsstetige Funktionen von lokal endlicher Variation. Man zeige:

i) Für die Stieltjes-Integrale bezüglich A und B gilt die folgende partielle Integrationsformel:
$$A_t B_t = A_0 B_0 + \int\limits_{(0,t]} A_{s-}\, dB_s + \int\limits_{(0,t]} B_s\, dA_s.$$

ii) Ist A stetig und $f \in C^1(\mathbb{R})$, so gilt
$$f(A_t) = f(A_0) + \int_0^t f'(A_s)\, dA_s.$$

iii) Ist A stetig differenzierbar, so gilt
$$\int_0^t B_s\, dA_s = \int_0^t B_s A'_s\, ds.$$

Aufgabe 3: Sei A_t, $t \in [0,1]$ eine reellwertige, rechtsstetige Funktion und ζ_n eine monotone Folge von Partitionen von $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} |\zeta_n| = 0$. Für eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definieren wir die Summen
$$S_n^f := \sum_{t_i, t_{i+1} \in \zeta_n} f(t_i)(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}).$$
Man zeige: Konvergiert für $n \to \infty$ die Folge S_n^f für *jede* stetige, reellwertige Funktion f auf $[0,1]$ gegen eine reelle Zahl S^f, dann muss A von endlicher Variation sein.
Hinweis: Für den Beweis wende man den Satz von Banach-Steinhaus über die gleichmäßige Beschränktheit auf die Operatorfamilie (T_n), $T_n : X \to \mathbb{R}$,
$$T_n f := \sum_{t_i, t_{i+1} \in \zeta_n} f(t_i)(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}),$$
an. Als Urbild-Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ dient hier $C([0,1];\mathbb{R})$, der Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$, aussgestattet mit der Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Jede Aufgabe 8 Punkte