Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2008

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

9.Blatt
Übung: 10.06.08
Abgabe: 17.06.08

Aufgabe 1: Man zeige: Eine Folge von (X^n) von Zufallsvariablen, $X^n \geq 0$ ist genau dann NICHT gleichgradig integrierbar, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass entlang einer Teilfolge X^{n_k} disjunkte Mengen A_k existieren, so dass

$$E[X^{n_k} \mathbb{1}_{A_k}] \geq \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Aufgabe 2: Wir betrachten im Folgenden einen Finanzmarkt mit Aktienpreisprozess

$$S_t = s \exp\Big(\sigma_1 W_t^1 + \sigma_2 W_t^2 + \big((\mu - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\big)t\Big)$$

und konstanter Zinsrate r, wobei W^1 und W^2 zwei unabhängige Brownsche Bewegungen sind.

i) Man bestimme die an $(\mathcal{F}_t^{W^1, W^2})$ adaptierten stochastischen Exponentiale $Z = \mathcal{E}(L)$, so dass $Z\tilde{S}$ ein lokales Martingal ist.
Hinweis: Man benutze den Itô-Darstellungssatz für die zweidimensionale Brownsche Bewegung.

ii) Sei nun $\sigma_2 \equiv 0$. Was ist dann der Superhedging-Preis von

$$H = \Big(K - e^{W_T^1 + W_T^2}\Big)^+ ?$$

iii) Man berechne

$$U_t = \operatorname*{ess\,sup}_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[\tilde{H} \big| \mathcal{F}_t]$$

und schreibe dies wie in der optionalen Zerlegung.

Aufgabe 3:

i) Sei W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\tilde{P}$ die Verteilung von $B_t = W_t + bt$, $b \in \mathbb{R}$, und τ eine Stoppzeit mit $P[\tau < \infty] = 1$. Man zeige, dass

$$E[e^{bW_\tau - \frac{b^2}{2}\tau}] = \tilde{P}[\tau < \infty].$$

ii) Sei nun

$$S_t = s \exp\Big(\sigma W_t + \big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\big)t\Big).$$

Man zeige, dass für die *first passage time* von a, $s > a$,

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : S_t \leq a\}$$

gilt, dass für $\mu \leq \sigma^2/2$ die Wahrscheinlichkeit $P[\tau_a < \infty] = 1$.

iii) Man zeige mit Hilfe von i) und ii), dass für den Erwartungswert der Laplace-Transformierten von τ_a unter dem Martingalmaß

$$E^*[e^{-\mu\tau_a}] = \Big(\frac{a}{s}\Big)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}, \qquad \mu \geq 0,\, \sigma > 0,$$

gilt.

Bitte wenden

Aufgabe 4: *American Perpetual Put*
Diese Aufgabe soll zur Berechnung des Preises eines *Perpetual American Put*, also einer Amerikanischen Put-Option mit unendlichem Zeithorizont, im Black-Scholes Modell dienen. Gegeben ist also die Dynamik des Aktienkurses

$$S_t = s \exp\left(\sigma W_t^* + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right), \qquad r \geq 0,\, \sigma > 0,$$

und die Auszahlung

$$H_t := (K - S_t)^+, \qquad t \geq 0,$$

gesucht ist der Preis

$$\Pi(H) = \sup_\tau E^*[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+],$$

wobei das Supremum über alle Stoppzeiten $\tau \geq 0$ genommen wird.

i) In einem ersten Schritt beschränken wir uns auf die *Passierzeiten*, also Stoppzeiten der Form

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 \,:\, S_t \leq a\}$$

für $a \leq K$. Die "Performance" der jeweiligen Stoppzeit ist gegeben durch die Funktion

$$g_a(s) = E^*[e^{-r\tau_a}(K - S_{\tau_a})^+ \mid S_0 = s].$$

Man maximiere $g_a(s)$ über alle $a \in [0, K]$ mit Hilfe von Aufgabe 3.

ii) Sei nun a^* das entsprechende Maximum. Man zeige mit Hilfe der Itô-Formel, dass

$$\left(g_{a^*}(S_{t\wedge\tau})e^{-r(t\wedge\tau)}\right)_{t\geq 0} \quad \text{ein } P^*\text{-Supermartingal für jede Stoppzeit } \tau \text{ und}$$
$$\left(g_{a^*}(S_{t\wedge\tau_{a^*}})e^{-r(t\wedge\tau_{a^*})}\right)_{t\geq 0} \quad \text{ein } P^*\text{-Martingal ist.}$$

Man diskutiere die Anwendbarkeit der Itô-Formel in diesem Fall!

iii) Man zeige, dass für jede Stoppzeit $\tau > 0$

$$E^*[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+] \leq E^*[e^{-r\tau_{a^*}}(K - S_{\tau_a^*})^+]$$

gilt.